Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

3. előadás (március 1.)

Az óra teljes egészén a valós számok axiómáit tárgyaltuk. Előzetes meseképpen a végtelen tizedes törtek kapcsán felmerülő esetleges problémákra világítottam rá: vajon 0,99999... és 1 közül melyik a nagyobb? Mutattam egy általános iskolás/középiskolás érvelést arra, hogy egyenlőek, de rögtön felhívtam a figyelmet, hogy vigyázzunk ezzel az okoskodással, mert így az is „igazolható”, hogy $1 + 2 + 2^2 + 2^4 + \cdots = -1$.

Ezt követően beszéltünk arról, hogy mit jelent a konstruktív megalapozás: megkonstruáljuk a valós számokat, például legyenek végtelen tizedestörtek, de ekkor definiálnunk kell közöttük a műveleteket és a rendezést. Mi ehelyett az axiomatikus felépítést választjuk: nem törődünk azzal, hogy mik a valós számok, csak a tulajdonságaik érdekelnek. Elvárjuk, hogy eleget tegyenek bizonyos szabályoknak (axiómák). Természetesen itt is jogosan vetődik fel, hogy van-e olyan struktúra, amely kielégíti az általunk kirótt szabályokat. Felírtam az axiómák négy „csoportját” (test, rendezési, arkhimédészi és Cantor).

A testaxiómák a valós számok algebrai tulajdonságait rögzítik. Adott két művelet, az összeadás és szorzás. Az összeadásra a következőket írjuk elő: kommutativitás, asszociativitás, nullelem létezése és ellentett elem létezése. A szorzás esetében ugyancsak megkívánjuk a kommutativitást, asszociativitást, ezenkívül a nullelemtől különböző egységelem létezését, illetve a nullelem kivételével a reciprok létezését. Az összeadást és szorzást a disztributivitás axiómája kapcsolja össze. Az olyan struktúrákat, amelyekben mindez a 9 axióma teljesül, testeknek szokás hívni. Megjegyeztem, hogy a $\{0, 1\}$ halmaz modulo 2 műveletekkel test, de például $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmaz a szokásos modulo 4 műveletekkel nem test (a 2-nek nincs reciproka). (Meséltem arról is, hogy a testaxiómák között találhatunk olyat, amelyik következik a többiből, de ezzel nem törődünk „kényelmi” okokból.)

Ezután megbeszéltük az axiómák néhány következményét, többek között azt, hogy az ellentett és a reciprok egyértelmű, amelyeket szokás szerint $-a$ és $\frac{1}{a}$ fogja jelölni. Ezenkívül beláttuk, hogy $a \cdot 0 = 0$, majd házinak adtam fel azt, hogy $(-1) \cdot a = -a$ minden a-ra.

Ezt követően a rendezési axiómákra tértünk rá. Bevezettük az $a < b$ relációt, és erre előírtuk a trichotómiát, tranzitivitást, valamint összekapcsoltuk az összeadás és szorzás műveletével ($a < b \implies a + c < b + c$, illetve $(a < b) \wedge (0 < c) \implies ac < ac$). (Meséltem arról, hogy a kő–papír–olló játék valójában egy nem tranzitív rendezés.) A rendezés segítségével bevezethetjük a pozitív, negatív szám elnevezéseket. Használhatjuk továbbá az $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ jelöléseket is. Értelmezhetjük ezenkívül a nyílt, zárt, egyik oldalról nyílt, másikról zárt intervallumokat, a nyílt, zárt félegyeneseket. Megemlítettem az elfajuló intervallumokat is.

Bevezettük ezután az abszolútérték fogalmát (a tulajdonságait nem írtam fel, ezeket elhisszük). Kimondtam a háromszög-egyenlőtlenség klasszikus változatát ($|a + b| \leq |a| + |b|$), valamint egy másik változatát ($||a| - |b|| \leq |a + b|$.) A bizonyítást gyakorlatra hagytam.

Tételként igazoltam, hogy $0 < 1$. Ennek következménye, hogy $1 + 1 + \cdots + 1$ mind különböző, és ezek halmazát neveztem pozitív egészeknek, amelyet $\mathbb{N}^+$-szal jelöltem. Az egész számok halmaz ebből a 0 és az ellentett elemek hozávételével kapható, jelölése $\mathbb{Z}$. A p/q alakú számok halmazát, ahol p, q egészek és $q \neq 0$, a racionális számok halmazának nevezzük, jelölése $\mathbb{Q}$.

Következett az arkhimédészi axióma (minden valós számnál van nagyobb pozitív egész szám), amely az előzőekből nem vezethető le (de nem könnyű példát találni, erről meséltem picit). Alkalmazásként kimondtam, hogy bármely két különböző valós szám között van racionális szám. A bizonyítást elég elvégezni a $0 \leq a < b$ esetre. Ekkor választhatunk egy olyan n pozitív egészt, amelyre $1/n < b - a$, és legyen $k_{\min}$ a legkisebb olyan pozitív egész, hogy $a < k_{\min}/n$ (ilyenek éppen az arkhimédészi axióma miatt léteznek). Megmutattuk, hogy ezzel a választással ($k_{\min}$ minimalitása folytán) $b < k_{\min}/n$ is érvényes.

A jövő órán a Cantor-axiómával és következményeivel folytatjuk.