

# Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

## 1. előadás (február 15.)

Az óra elején megszavaztuk, hogy 14:00-kor kezdünk, és 45 perc után tartunk egy 5 perces szünetet, így 15:35-ig tart az óra. Ezután röviden elmondtam a tárggyal kapcsolatos legfontosabb információkat (számonkérés, jegyzet stb.); minden részletesen elolvasható az [abesenyei.web.elte.hu](http://abesenyei.web.elte.hu) oldalon. Fontos, hogy a gyakorlatokon az előadás anyagával tisztában legyünk (legalább egy képünk legyen arról, hogy mi is folyik az előadáson), ezért a gyakorlatokon a röpdolgozatokban definíció, vagy tétel kimondását és kérjük (bizonyításokat természetesen nem kell tudni). A bevezető rész végén még a tematikáról is ejtettem szót, valamint a későbbi félévek analízis tárgyait szintén megemlítettem.

Ezután belevágtunk a logika témakörébe. Kicsit beszéltem arról, mi a logika („a helyes következtetések tudománya”), és megemlítettem, hogy a matematikában a logika és a józan ész segítségével alapigazságokból tételeket vezetünk le (bizonyítunk). Megbeszéltük, hogy logikai állításon olyan kijelentést értünk, amelynek az igazságértéke egyértelműen eldönthető, majd rátértünk a logikai műveletekre ( $\wedge, \vee, \implies, \iff, \neg$ ), amelyekkel állításokból újabb állításokat készíthetünk. Pontosán definiáltuk az így gyártott állítások mindegyikének igazságértét (vagyis, hogy mikor igaz és mikor hamis). Az  $A \vee B$  kapcsán felhívtam a fogalmat, hogy a matematikában a „vagy” mindig megengedő és nem kizáró. Humoros példaként a jól ismert „Ön dönt, iszik vagy vezet.” felhívást idéztem, amelyet a hétköznapiokban másképp értelmezünk (egyszerre nem engedjük meg az ivást és a vezetést is), mint a matematikában (itt megengedjük, hogy a vagy kapcsolat mindkét tagmondata igaz legyen). Az  $A \implies B$  következtetés ürügyén pedig egy kicsit elidőztünk azon, hogy a „Hamis állításból minden következik.”, amelynek illusztrációjaként szóban bebizonyítottam, hogy „ha  $1 = 2$ , akkor én vagyok a pápa” (szerencsére  $1 \neq 2$ ).

Ezt követően megbeszéltük a különböző logikai műveletek és a tagadás kapcsolatát, ezek az úgynevezett de Morgan-féle azonosságok, pl.  $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$  (de Morgannel kapcsolatban házi feladatként feladtam, hogy vajon mikor születhetett, ha egyszer az életkorát kérdezőknek azt válaszolta, hogy „ $x$  éves voltam az  $x^2$  évben”).

Következett ezután a nyitott mondat „fogalma” (olyan állítás, amelynek igazságértéke egy vagy több változótól függ), majd bevezettük az univerzális ( $\forall$ ) és egzisztenciális ( $\exists$ ) kvantorokat, és megbeszéltük az igazságértéküket, tagadásukat:  $\forall x A(x), \exists x A(x), \neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x), \neg(\exists x A(x)) = \forall x \neg A(x)$ . Végül megjegyeztem, hogy ha egy  $A(x) \implies B(x)$  típusú állítást látunk, akkor általában odaértjük elé, hogy minden  $x$ -re (és így a tagadása úgy fog kezdődni, hogy van olyan  $x$ , amelyre...).

Rátértünk ezt követően a bizonyítási módszerekre, először az indirekt bizonyítás menetét néztük meg. Példaképpen a  $\sqrt{2}$  irracionalitását igazoltam, de nem az elcsépeelt bizonyítással, hanem a következőt mondtam el (itt csak nagyon tömören vázolom): indirekt, legyen  $q$  a legkisebb pozitív egész szám, amelyre  $\sqrt{2} = p/q$  egész. De akkor  $\sqrt{2} = (2q - p)(p - q)$ , ahol  $p - q$  is pozitív egész, amely ráadásul kisebb, mint  $q$ , ami ellentmond  $q$  minimalitásának.

Majd jött a teljes indukció legegyszerűbb formája: ha  $A_1$  igaz, és  $\forall n(A_n \implies A_{n+1})$ , akkor ezzel beláttuk, hogy  $A_1, A_2, A_3, \dots$  mind igazak.

Az óra végén a teljes indukció alkalmazásaként igazoltuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget a szokásos teljes indukciós okoskodással (közben felhívtam a figyelmet arra, hogy egy „Tétel”-nek mindig vannak feltételei, és érdemes nyomon követni, hogy a bizonyításban hol használjuk azokat). Az egyenlőség esetét felírtam megjegyzésként és kértem, hogy gondolják át a bizonyítás alapján.