Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

1. előadás (szeptember 11.)

Az előadás elején a szokásos tudnivalókról ejtettem szót: kezdési időpont, elérhetőségek, számonkérés, tematika. A félév során az analízis alábbi fejezeteit fogjuk tárgyalni: improprius integrál, hatványsorok, az $\mathbb{R}^p$ tér (konvergencia, nyílt és zárt halmazok), többváltozós függvények folytonossága és határértéke, többváltozós függvények differenciálszámítása.

Ezután belevágtunk az improprius integrál témakörébe. Egy kis motivációval kezdtem, először visszautaltam a Riemann-integrálra, amelyet korlátos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényekre értelmeztünk. Célunk, hogy ezt a fogalmat kiterjesszük nemkorlátos intervallum vagy nemkorlátos függvény esetére. Két példát néztünk meg, formálisan kiszámoltuk az $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ integrált, valamint az $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ integrált. A formális számolás rögtön előre is vetíti, hogy mi legyen az integrál definíciója, mégpedig véges intervallumokon vett integrálok határértéke.

A definíció kimondésa előtt célszerűnek láttam a *lokálisan integrálható* függvény fogalmát bevezetni: egy f függvény lokálisan integrálható, ha az értelmezési tartományának bármely korlátos és zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Ha az $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ függvény lokálisan integrálható, akkor azt mondjuk, hogy az f-nek az $[a,b)$-n vett *improprius integrálja konvergens*, amennyiben a

$$\lim_{t\to b-0}\int_a^t f$$

határérték létezik és véges. Ekkor az improprius integrált $\int_a^b f$ jelöli, és az értéke a fenti limesz. Ha az iménti határérték létezik, de valamelyik végtelen, akkor az improprius integrál divergens, de létezik. Ha a limesz nem létezik, akkor az improprius integrál divergens, és nem is létezik. A definícióban b lehet véges és plusz végtelen is, utóbbi esetben a jobbról való tartás feltétele elhagyható (de nem hiba), hiszen a végtelenhez „egy oldalról” tarthatunk csak. Végül még a jobb átláthatóság kedvéért a konvergens, divergens, létezik és nem létezik elnevezéseket egy „táblázatszerűségbe” foglaltam.

Hasonlóan értelmezhető $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény improprius integráljának konvergenciája, azt nem részleteztem.

Rögtön megnéztünk egy példát: milyen α valós számra konvergens $\int_0^1 x^\alpha\,dx$. Válaszképpen az adódott, hogy pontosan $\alpha > -1$ értékekre. Házi feladat az $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ konvergenciájának vizsgálata.

Ezután megjegyeztük, hogy ha f az $[a,b]$-n Riemann-integrálható, akkor most már $\int_a^b f$ három dolgot is jelent, de ezek szerencsére egybeesnek (ezt az integrálfüggvény folytonosságára hivatkozva indokoltuk).

Az improprius integrál definícióiból maradt még az (a,b) típusú intervallum esete. Ekkor az improprius integrál konvergens, ha van olyan $c \in (a,b)$, hogy $\int_a^c$ és $\int_c^b f$ is konvergensek. Ebben az esetben az iménti két integrál összege legyen $\int_a^b f$. Felmerül, hogy vajon a definíció korrekt-e abban az értelemben, hogy a konvergencia és az érték nem függ a c pont választásától. Szerencsére korrekt, de ezt nem láttam be (aki akarja, meggondolhatja).

Példaképpen kiszámoltuk az $\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ integrált a 0-nál való kettébontással.

Ezt követően megemlítettem, hogy az improprius integrál és a műveletek kapcsolata majdnem(!) ugyanúgy megy, mint a Riemann-esetben, például ha $\int_a^b f$ és $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b (f+g)$ is konvergens (ez szerepelni fog gyakorlaton). Vigyázat azonban, a szorzatra ez nem igaz: $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ konvergens, de $\int_0^1 (1/\sqrt{x})^2\,dx$ nem (ezek a korábbi példákból következnek).

Az előadás végén az abszolút konvergencia fogalmát vezettem be: az $\int_a^b f$ improprius integrált abszolút konvergensnek nevezzük, ha az $\int_a^b |f|$ improprius integrál konvergens. Végezetül tételként kimondtam, hogy az abszltú konvergenciából következik a konvergencia.