Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2017. ősz

1. előadás (szeptember 11.)

Az előadás elején röviden elmondtam a szokásos tudnivalókat. A múlt félévi Bevanal2-höz képest szinte semmi változás nincs. Végül pedig a tematikáról beszéltem picit, a félév során a folytonosság, függvényhatárérték és differenciálszámítás fejezeteit fogjuk tárgyalni.

A bevezető után belekezdtünk a folytonosság témakörébe. Motivációképpen felrajzoltam néhány függvénygrafikont, hogy lássuk, milyen sokféleképpen viselkedhetnek a függvények egy adott pont körül. Ezeket fogjuk a következőkben matematikailag megfogalmazni.

A rajzolgatást követően rátértünk a pontos definícióra. Először egy $a \in \mathbb{R}$ pont $\delta > 0$ sugarú környezetét értelmeztük, amely az $(a-\delta, a+\delta)$ intervallum. Egy f függvényt folytonosnak nevezünk az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha egyrészt értelmezve van az a egy környezetében, továbbá

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x (|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Megjegyeztük, hogy szemléletesen arról van szó, hogy adott ε-hoz olyan δ-t kell megadni, hogy a δ sugarú környezet felett az f grafikonja az $f(a)$ körüli ε sugarú sávban halad. Azt is érdemes észrevenni, hogy nem kell a legjobb δ-t megadni, elég egyet, és ha egy adott ε-hoz valamilyen δ jó, akkor bármely $\delta' < \delta$ is megfelel (ezt az észrevételt használjuk, amikor δ-ról feltesszük, hogy kisebb valamilyen értéknél). Ha pedig δ jó választás ε-hoz, akkor bármely $\varepsilon' > \varepsilon$-hoz is megfelel (ez utóbbi észrevételt használjuk például, amikor ε-ról feltételezzük, hogy pici – „annak ellenére, hogy azt az ellenség adja”).

A definíció után példák következtek: $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, mindegyik folytonos bármely $a \in \mathbb{R}$ pontban, és ezt a definíció alapján igazoltuk is. Definíció szerint megmutattuk azt is, hogy az előjelfüggvény a 0 pontban nem folytonos – láttuk, hogy a „nem-folytonosság” igazolása nem könnyű a definíciót használva. Bizonyítás nélkül kimondtam, hogy a Dirichlet-függvény sehol sem folytonos, illetve az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény csak a 0 pontban folytonos (lehet, hogy gyakorlaton megnézzük majd). Meseképpen feltettem azt az egyáltalán nem könnyű kérdést, hogy vajon van-e olyan függvény, amely pontosan a racionális, vagy pontosan az irracionális pontokban folytonos (az egyik van, a másik nincs).

Ezután következett az átviteli elv. Ha f értelmezve van az a pont egy környezetében, akkor f pontosan akkor folytonos a-ban, ha $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$. Az átviteli elv tehát sorozatok határértékére viszi át a folytonosság fogalmát. Alkalmazásképpen igazoltuk, hogy az $\{x\}$ függvény nem folytonos a 0 pontban, hiszen az $x_n = -1/n$ választással $x_n \to 0$, de $\{x_n\} = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \neq 0$. Másik példaként az $[x]$ függvényt tekintettük a 2 pontban. Mivel $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ választással $x_n \to 2$ és $[x_n] = 1 \not\to 2 = [2]$, ezért az $[x]$ függvény nem folytonos a 2 pontban. Láttuk, hogy a „nem-folytonosság” igazolása az átviteli elv segítségével sokkal kézenfekvőbb.

Az átviteli elv további alkalmazásaként a folytonosság és algebrai műveletek kapcsolatát néztük meg. Kimondtam, hogy ha f, g folytonosak a-ban, akkor $f + g$, fg is folytonosak a-ban, továbbá $g(a) \neq 0$ esetén f/g is. A bizonyítás az átviteli elvet, valamint a sorozathatárérték és algebrai műveletek kapcsolatát használja, ezt az összegre részletesen megnéztük, a szorzatra teljesen hasonlóan megy. A hányados esetéhez a plusz feltevés miatt egy segédállításra lesz szükségünk, ezzel folytatjuk a következő héten.