Kalandozás a nevezetes egyenlőtlenségek világában

Besenyei Ádám
badam@cs.elte.hu

1. Rendezési egyenlőtlenség

1.1. Egy fiókban 10 forintos, egy másikban 20 forintos, egy harmadikban 50 forintos, egy negyedikben pedig 100 forintos érmék vannak. A fiókokból úgy vehetünk ki érméket, hogy az egyes fiókokból kivett érmék száma 3, 4, 5, 6, de ránk van bízva, milyen sorrendben. Melyik fiókból mennyi érmét vegyünk ki, hogy a kivett érmék összértéke a lehető legnagyobb legyen? Milyen esetben lesz a lehető legkisebb a kivett érmék összértéke?

Szűcs Adolf, 1935.

1.2. Tudjuk, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$ vagy $ay + bx$?

Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis 2 példatár, 1.140. feladat

1.3. Bizonyítandó, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ minden a, b, c-re fennáll!

Pósa Lajos: Összefoglalás, 433. feladat

1.4. Mely x és y valós számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$x + y + xy \geq x^2 + y^2 + 1.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 9. évfolyam, 2014/2015. tanév

1.5. Jelölje a téglatest felszínét A, testátlójának hosszát d, továbbá legyen $k \geq 2$ tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$kd^2 - A$$

sohasem lehet negatív.

OKTV, 1993/1994. tanév

1.6. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1963/1964. tanév

1.7. Igazoljuk, hogy nemnegatív a, b, c valós számok esetén

$$a^5b + b^5c + c^5a \leq a^6 + b^6 + c^6.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1974/1975. tanév

1.8. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

KöMaL, F. 2861.

1.9. Igazolja, hogy ha az x, y és z valós számokra teljesül az alábbi egyenlőség, akkor közülük valamelyik kettő egyenlő egymással:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1992/1993. tanév

1.10. Keressük meg a

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

kifejezés legnagyobb értékét, ha $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Arthur Engels, Problem solving strategies, Problem E18.

1.11. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív $a\le b\le c$ számokra teljesül az

$$a^b b^c c^a \le a^a b^b c^c$$

egyenlőtlenség!

Kárpátaljai versenyfeladat

KöMaL, B. 4291.

1.12. Bizonyítsuk be, hogy ha a,b,c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3.$$

Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis 2 példatár, 1.144. feladat

1.13. Legyen $b_1,b_2,\dots,b_n$ a pozitív $a_1,a_2,\dots,a_n$ számok egy tetszőleges permutációja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}\ge n.$$

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 1935.

2. Csebisev-egyenlőtlenség

2.1. Igazoljuk, hogy ha $a_1\le a_2\le\dots\le a_n$ és $b_1\le b_2\le\dots\le b_n$ valós számok, akkor

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)\le n(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n).$$

Csebisev-egyenlőtlenség, 1882.

2.2. Bizonyítsuk be, hogy ha a,b pozitív valós számok, akkor

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4.$$

Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis 2 példatár, 1.141. feladat

2.3. Igazoljuk, hogy ha $a_1,\dots,a_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}.$$

Számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség

2.4. Igazoljuk, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n.$$

Számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség

2.5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}.$$

KöMaL, F. 2639.

3. Abel-egyenlőtlenség

3.1. Tegyük fel, hogy Anti bélyeggyűjteményében bármely megadott értéknél drágább bélyegből legfeljebb kétszer annyi van, mint Bandi gyűjteményében. Bizonyítsuk be, hogy Anti gyűjteménye legfeljebb kétszer értékesebb, mint Bandié!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 10. évfolyam, 1979/1980. tanév

3.2. Az Abel-átrendezés segítségével adjunk zárt képletet az alábbi összegekre:

a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$,

b) $1 \cdot 1^2 + 2 \cdot (1^2 + 2^2) + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) + \cdots + n \cdot (1^2 + \cdots + n^2)$.

c) $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$, ahol (a_n) egy d differenciájú számtani sorozat, (b_n) pedig egy q hányadosú mértani sorozat

Szájhagyomány

3.3. 10 csapat körmérkőzést játszik. Mindegyik pár pontosan egyszer mérkőzik, és a mérkőzések nem végződhetnek döntetlenül. Győzelemért 1 pont jár, vereségért 0. Bizonyítsuk be, hogy a pontszámok négyzetösszege nem lehet több 285-nél.

KöMaL, Gy. 2576.

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 11. évfolyam, 2013/2014. tanév

3.4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív egész számokból álló halmaz semelyik két részhalmazában nem egyenlők az elemek összege, akkor a halmaz elemeinek reciprokösszege kisebb kettőnél.

Erdős Pál problémája, 1974.

3.5. Adott n darab egységnyi térfogatú oxigénpalack, bennük a nyomások rendre $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$. Egy-egy lépésben a palackok tetszőleges csoportját összekapcsolhatjuk, aminek következtében az összekapcsolt palackok mindegyikében a résztvevő nyomások számtani közepe lesz az eredő nyomás. A palackok ezután szétkapcsolhatók, és új csoportok hozhatók létre. Mekkora az a lehető legnagyobb nyomás, amelyet ily módon a legkisebb, p_n nyomású palackban elérhetünk?

Herczegh János feladata

3.6. Az a, b, c, d nemnegatív számokra $a \leq 1$, $a+b \leq 5$, $a+b+c \leq 14$ és $a+b+c+d \leq 30$. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10$.

KöMaL, B. 3511.

4. Karamata-egyenlőtlenség

4.1. Az a, b, c, d nemnegatív számokra $a \leq 1$, $a+b \leq 5$, $a+b+c \leq 14$ és $a+b+c+d \leq 30$. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10$.

KöMaL, B. 3511.

4.2. Legyenek $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ valós számok, amelyekre

$$\begin{aligned} x_1 &\leq y_1, \\ x_1 + x_2 &\leq y_1 + y_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq y_1 + y_2 + y_3, \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy ekkor tetszőleges monoton növő, konvex $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

Hardy–Littlewood–Pólya, 1929

Jovan Karamata, 1932.

4.3. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ pozitív valós számokra teljesül, hogy tetszőleges $1 \leq k \leq n$ esetén $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}.$$

KöMaL, A. 408.

5. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

5.1. Az x, y számok kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ feltételt. Határozzuk meg a $2x + 3y$ kifejezés lehetséges legnagyobb és legkisebb értékét!

Pósa Lajos: Összefoglalás, 447. feladat

5.2. Milyen x, y számpárokra teljesül a

$$3 \sin x - 4 \cos x = 4y^2 + 4y + 6$$

egyenlőség?

KöMaL, F. 2554.

5.3. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

bármilyen pozitív vagy negatív (esetleg 0) számokat jelentsen a, b, c, d. Mikor érvényes az egyenlőség jele?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1955/1956. tanév

5.4. Legyenek az a, b, c, d számok pozitív valós számok! Igazolja, hogy

$$\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d} \leq \sqrt{(a + d) \cdot (b + c)}!$$

OKTV, 2008/2009. tanév

5.5. Igazoljuk, hogy bármely valós a és b számra teljesül a $8(a^4+b^4) \geq (a+b)^4$ egyenlőtlenség!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 10. évfolyam, 1996/1997. tanév

5.6. Igazolja, hogy ha a P polinom minden együtthatója nemnegatív valós szám, akkor $x>0$ esetén $P(x)P(\frac{1}{x}) \geq (P(1))^2$.

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 2016.

5.7. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 11, \\ x^2+2y^2+3z^2 &= 66. \end{aligned}$$

KöMaL, F. 2968.

5.8. Az a, b, c, x, y, z valós számokra

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 25, \\ x^2+y^2+z^2 &= 36, \\ ax+by+cz &= 30. \end{aligned}$$

Mennyi az $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ hányados értéke?

KöMaL, Gy. 2641.

5.9. Igazolja, hogy ha a, b, c, x, y, z 0-tól különböző valós számok és

$$a^2+b^2+c^2 = ax+by+cz,$$

és

$$ax+by+cz = x^2+y^2+z^2,$$

akkor az

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$$

állandó érték!

OKTV, 1996/1997. tanév

5.10. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{5(x^2+2yz)}+\sqrt{6(z^2+2zx)}+\sqrt{5(z^2+2xy)} = 4(x+y+z)$$

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 12. évfolyam, 2003.

5.11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám legalább kétféleképpen áll elő két négyzetszám összegeként, akkor nem lehet prímszám.

KöMaL, Gy. 2600.

5.12. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számok esetén

$$(a_1+\cdots+a_n)^2 \leq \frac{\pi^2}{6}\left(a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2\right).$$

Carlson-egyenlőtlenség, 1934.

6. „Titu-lemma”

6.1. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b valós és $x, y > 0$ számokra fennáll az

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \le \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$$

egyenlőtlenség.

„Titu-lemma”

6.2. Bizonyítsuk be, hogy minden $0 < a < 1$ számra

$$\frac{2000^2}{1-a} + \frac{1}{a} \ge 2001^2!$$

Milyen a-ra áll fenn egyenlőség?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 10. évfolyam, 2001/2002. tanév

6.3. Bizonyítsuk be, hogy ha x és y 1-nél nagyobb valós számok, akkor

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \ge 8.$$

Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

OKTV, 1992/1993. tanév

6.4. Az a, b, c pozitív valós számok összege 1. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2} \le \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} < 1.$$

Tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikai versenye, 2001.

6.5. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra teljesül az

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \ge \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

egyenlőtlenség.

OKTV, 2000/2001. tanév

7. Nesbitt- és Shapiro-egyenlőtlenség

7.1. Jelentsen a, b és c olyan nemnegatív valós számokat, amelyeknek összege 1-gyel egyenlő! Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c} \ge \frac{3}{2}!$$

Mely esetben érvényes itt az egyenlőség?

OKTV, 1983/1984. tanév

7.2. Határozza meg a következő kifejezés minimumát az $a, b, c > 0$ feltételre nézve!

$$S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Hajdú-Bihar megyei középiskolások matematikai versenye, 11. évfolyam, 2014/2015. tanév

7.3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Középiskolások Hajdú-Bihar megyei Matematikaversenye, 11. évfolyam, 1983.
Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis 2 példatár, 1.143. feladat
Nesbitt-egyenlőtlenség, 1903.

7.4. Határozzuk meg az

$$E = \frac{2x}{3y+4z} + \frac{3y}{4z+2x} + \frac{4z}{2x+3y}$$

kifejezés legkisebb értékét, ha x, y és z pozitív valós számok!

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 10. évfolyam, 2012.

7.5. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2,$$

ahol a, b, c egy háromszög oldalainak hossza.

Felvidéki versenyfeladat

7.6. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$1 < \frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma + \sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta} < 2.$$

OKTV, 1990/1991. tanév

7.7. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c, d tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

OKTV, 1985/1986. tanév

8. Háromszög-egyenlőtlenség

8.1. Öt gyufásdobozra ráírtuk a bennük található gyufaszálak számát, ezek 9, 17, 18, 12, 24. A gyufásdobozok egy kör kerületén helyezkednek el. Szomszédos gyufásdobozokból átrakhatunk egymásba gyufaszálakat. A cél az, hogy minden gyufásdobozban azonos számú gyufaszál legyen, és az összes átrakott gyufaszálak száma a lehető legkisebb legyen.

Sokszínű matematika tankönyv, 9. osztály

8.2. A $2 \leq x \leq 8$ valós számokra értelmezzük az

$$f(x) = |x-2| + |x-4| - |2x-6|$$

függvényt. Határozza meg f legkisebb és legnagyobb értékét! Adja meg mindkét esetben a szélsőérték helyét is!

Középiskolások Hajdú-Bihar megyei Matematikaversenye, 12. évfolyam, 2003.

8.3. Adja meg a valós x értékre értelmezett $K(x)$ kifejezés legnagyobb értékét, ha

$$K(x) = |1-x| + |2-x| + |3-x|.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 9. évfolyam, 1990/1991.

8.4. Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$ függvény, ahol a, b, c valós paraméterek és $a < b < c$. Határozzuk meg az f függvény minimumát és minimumhelyét.

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 10. évfolyam, 2011/2012. tanév

8.5. Határozza meg azt az x valós számot, amelyre az

$$f(x) = |8-x| + |11-x| + |13-x| + |16-x| + |19-x|$$

függvény értéke a legkisebb. Mennyi ez az érték?

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 10. évfolyam, 2013.

8.6. Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre

$$|x-1| + |x-2| + \cdots + |x-n| \geq 1997$$

teljesül minden x valós számra?

KöMaL, Gy. 3159.

8.7. Bizonyítsa be, hogy a

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a+d)^2+(b+c)^2}$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $ac = bd$.

OKTV, 1989/1990. tanév

8.8. Mennyi a $\sqrt{x^2+(y-1608)^2} + \sqrt{y^2+(x-1206)^2}$ kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 9. osztály, 2009/2010. tanév

8.9. Az x valós szám mely értékére van minimuma az

$$f(x) = \sqrt{2x^2-6x+9} + \sqrt{2x^2+6x+9}$$

függvénynek?

OKTV, 1988/1989. tanév

8.10. Állapítsa meg az

$$f(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(b-x)^2+c^2}$$

függvény minimumát, ha a, b, c adott pozitív valós számok!

OKTV, 1986/1987. tanév

Emelt szintű érettségi gyakorló feladat, KöMaL, 2016. március

8.11. Határozzuk meg az

$$x \mapsto \sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2-12x+52}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

függvény minimumát!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 10. évfolyam, 1990/1991. tanév

8.12. Igazoljuk, hogy minden x valós szám esetén

$$\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-10x+26} \geq 13.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Székely Mikó Matematikai Verseny, 11. évfolyam, 1991.

8.13. Határozzátok meg azt az (x, y) számpárt, amelyre az

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \sqrt{x^2+y^2-8x+16} + \sqrt{x^2+y^2-16x-18y+145} + \\ & + \sqrt{x^2+y^2+8x-24y+160} + \sqrt{x^2+y^2+4x+2y+5} \end{aligned}$$

értéke minimális lesz.

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 12. évfolyam, 2008.

8.14. Határozza meg az $f(x) = \sqrt{(x+1)^2+x^2} + \sqrt{(1-x)^2+x^2}$ függvény minimumának helyét és értékét!

Hajdú-Bihar megyei középiskolák matematikai versenye, 12. évfolyam, 2012/2013. tanév

8.15. Határozzuk meg a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-14x+58}$ függvény minimumát és minimumhelyét.

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny, 12. évfolyam, 2013/2013. tanév

8.16. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2} + \sqrt{b^2+(1-c)^2} + \sqrt{c^2+(1-a)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

KöMaL, F. 3238.

8.17. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 0$ valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2+b^2-ab} + \sqrt{b^2+c^2-bc} \geq \sqrt{a^2+c^2+ac}.$$

OKTV, 1988/1989. tanév

KöMaL, F. 2754.

8.18. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 0$ valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}} + \sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{2}} + \sqrt{c^2+d^2-cd\sqrt{2}} \geq \sqrt{a^2+d^2+ad\sqrt{2}}.$$

Repeta matek, 1998.

8.19. Bizonyítsuk be, hogy minden x, y valós számpár esetén fennáll a

$$\sqrt{9+x^2-3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}} + \sqrt{16+y^2-4y\sqrt{3}} \geq 5$$

egyenlőtlenség.

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 11. évfolyam, 2005.

9. Szorzat szélsőértéke

9.1. Keressük meg az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximumát a pozitív számok körében a differenciálszámítás alkalmazása nélkül.

KöMaL, B. 3467.

9.2. Határozzuk meg a valós számokon értelmezett

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

függvény legnagyobb és legkisebb értékét az $1 \leq x \leq 4$ intervallumon!

OKTV, 1990/1991. tanév

9.3. Mi a legkisebb értéke a következő kifejezésnek?

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6).$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 9. évfolyam, 1970/1971. tanév

9.4. Határozza meg az $x^4 - 15x^2 - 18x$ kifejezés legkisebb értékét, ha x valós szám!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 9. évfolyam, 2000/2001. tanév

10. Három szélsőérték-feladat

10.1. Az egyenlő felszínű egyenes körkúpok között melyiknek a legnagyobb a térfogata?

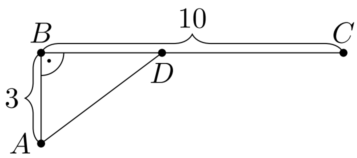
Sokszínű Matematika tankönyv 12. osztály

10.2. Az egyenlő térfogatú egyenes körkúpok között melyiknek a legkisebb a felszíne?

Sokszínű Matematika tankönyv 12. osztály

KöMaL, B. 3669.

10.3. Egy gyalogos a hóval borított mező A pontjában van, 3 kilométernyire a BC egyenes úttól (az ábrán $AB = 3$ km, $BC = 10$ km). Az országúton a gyalogos kétszer akkora sebességgel halad, mint a hómezőn. Mely D pontban kell kimennie a gyalogosnak az útra, hogy a legrövidebb idő alatt jusson el C-be?



Emelt szintű érettségi gyakorló feladat, KöMaL, 2016. március

11. Egy érdekes egyenlőtlenség

11.1. A p és q pozitív számokra $p + q \leq 1$. Igazoljuk, hogy bármely m, n egész számokra

$$(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geq 1.$$

OKTV, 2013/2014. tanév

12. Néhány különleges egyenlőtlenség

12.1. Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ valós számok esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Carleman-egyenlőtlenség, 1923.

12.2. Igazoljuk, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ valós számok, amelyek között van 0-tól különböző, akkor

$$(a_1 + \cdots + a_n)^4 < \pi^2 \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) \left(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \cdots + n^2 a_n^2\right).$$

Carlson-egyenlőtlenség, 1934.

12.3. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ tetszőleges, nem azonosan nulla valós számsorozatok, akkor

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \pi \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

David Hilbert, 1906; Issai Schur, 1911

12.4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számok esetén

$$\sum_{j,k=1}^{m} \frac{a_j a_k}{j+k} \geq 0.$$

12.5. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pozitív valós számok esetén

$$\sum_{j,k=1}^{m} \frac{a_j a_k}{\lambda_j + \lambda_k} \geq 0.$$

13. Vegyes egyenlőtlenségek

13.1. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

KöMaL, Gy. 2887.

13.2. Az r és s pozitív számok összege 1. Mutassuk meg, hogy

$$r^r \cdot s^s + r^s \cdot s^r \leq 1.$$

KöMaL, B. 4029.

13.3. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q olyan pozitív számokat jelentenek, amelyeknek összege 1-gyel egyenlő, akkor

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Mely esetben érvényes az egyenlőtlenség?

OKTV, 1984/1985. tanév

13.4. Az a, b, c, d számokra teljesül, hogy $a+b > |c-d|$ és $c+d > |a-b|$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a+c > |b-d|$.

KöMaL, B. 3745.

13.5. Legyenek x, y, z valós számok. Bizonyítsuk be, hogy ha $|x| < |y-z|$ és $|y| < |z-x|$, akkor $|z| \geq |x-y|$.

KöMaL, F. 3064.

13.6. Bizonyítsuk be, hogy bármely valós a és b értékre

$$(a+b)^4 \geq 7a^3b + 7ab^3 + 2a^2b^2.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 10. évfolyam, 1994/1995. tanév

13.7. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll $a > b > c > 0$, akkor

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} > 0.$$

OKTV, 1973/1974. tanév

13.8. Az a, b, c, d pozitív számok szorzata egy. Legyen

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Határozza meg A legkisebb értékét.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 9. évfolyam, 1990/1991. tanév

13.9. Az a és b pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2}.$$

OKTV, 1996/1997. tanév

13.10. Keressük meg $0 < x < \pi/2$ esetén a

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

kifejezés legkisebb értékét.

Folklór

13.11. Jelölje a, b, c egy tetszés szerinti háromszög oldalainak hosszát! Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{16}.$$

Tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikai versenye, 1990.

13.12. Bizonyítsuk be, hogy

a)

$$\log_a \frac{2bc}{b+c} + \log_b \frac{2ca}{c+a} + \log_c \frac{2ab}{a+b} \geq 3, \quad \text{ha } 0 < a, b, c < 1.$$

b)

$$\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{c+a}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq 3, \quad \text{ha } a, b, c > 1.$$

Milyen esetben áll fenn az egyenlőtlenség?

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 11. osztály, 1995.

13.13. Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3.$$

OKTV, 1999/2000. tanév

13.14. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in (0, 1)$, akkor

$$\log_a \frac{3bc}{ab+c(b+a)} + \log_b \frac{3ca}{ca+b(c+a)} + \log_c \frac{3ab}{ab+c(a+b)} \geq 3.$$

Székely Mikó Matematikaverseny, 10. évfolyam, 1999.

13.15. Bizonyítsa be, hogy ha a, b, c nemnegatív valós számok, akkor

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq a^3+b^3+c^3,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Középiskolások Hajdú-Bihar megyei Matematikaversenye, 11. évfolyam, 2003.

13.16. Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1964.

13.17. Jelölje a, b, c egy hárömszög három oldalának hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0.$$

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1983.

13.18. Legyen S a háromdimenziós tér pontjainak egy véges részhalmaza. Jelölje S_x, S_y, illetve S_z rendre az S pontjainak az yz, xz, xy síkokra vett ortogonális vetületeiből álló halmazokat. Bizonyítsuk be, hogy

$$|S|^2 \leq |S_x||S_y||S_z|$$

ahol $|A|$ a véges A halmaz elemeinek számát jelöli.

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1993.

13.19. Legyenek x és y pozitív valós számok. Milyen kapcsolat áll fenn x és y között, ha az

$$\frac{x^{16}}{y^{16}}+\frac{y^{16}}{x^{16}}-\frac{x^8}{y^8}-\frac{y^8}{y^8}+\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

kifejezés a legkisebb értékét veszi fel? Határozza meg ezt a legkisebb értéket.

OKTV, 1997/1998. tanév

13.20. Oldjuk meg az 1-nél nem nagyobb pozitív számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}=\frac{3}{x+y+z}.$$

OKTV, 1998/1999. tanév

13.21. Bizonyítandó, hogy ha a és b pozitív számok, akkor

$$(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

OKTV, 1953/1954. tanév

13.22. Bizonyítsuk be, hogy tetszés szerinti 1-nél nagyobb a számra

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_a 16} \geq 1.$$

OKTV, 1956/1957. tanév

13.23. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b$ pozitív szám, akkor

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

OKTV, 1956/1957. tanév

13.24. Az a, b, c valós számokra fennáll az

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a = b = c$.

OKTV, 1966/1967. tanév

13.25. Bizonyítandó, hogy ha a és b természetes számok, akkor

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{b}.$$

OKTV, 1966/1967. tanév

13.26. Bizonyítsuk be, hogy ha az a és b számok egyike sem negatív, akkor $a^3 - 3ab^2 + 2b^3$ sem negatív.

OKTV, 1968/1969. tanév

13.27. Az a, b, c pozitív számokra $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ teljesül. Határozzuk meg az

$$S = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

összeg lehető legkisebb értékét.

OKTV, 2002/2003. tanév

13.28. A feladatban szereplő változók pozitív valós számokat jelentenek.

a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}.$$

b) Igaz-e minden esetben, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} + \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \frac{a+b+c}{3} + \sqrt[3]{abc}\,?$$

OKTV, 2004/2005. tanév

13.29. Igazolja, hogy ha az x valós számra $3 \leq x \leq 16$, akkor:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-6} + \sqrt{49-3x} \leq 12.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 2005/2006. tanév

13.30. Mennyi a $\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y+3)^2}$ kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok és $x + 2y - 1 = 0$?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 2004/2005. tanév

13.31. Legyen x pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 + \frac{x}{3} > \sqrt[3]{1+x}.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1958/1959. tanév

13.32. Legyenek a és b egynél kisebb pozitív számok! Bizonyítandó, hogy ekkor

$$1 + a + b > 3\sqrt{ab}.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1961/1962. tanév

13.33. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b az 1-nél kisebb pozitív számok, akkor

$$1 + a2 + b2 > 3ab.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1956/1957. tanév

13.34. Bebizonyítandó, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5.$$

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 1963.

13.35. Bizonyítsa be, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

OKTV, 2012/2013. tanév.

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 12. évfolyam, 2015.

13.36. Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 1972.

13.37. Legyen n pozitív egész, $a, b \geq 1, c > 0$ valós számok. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{(ab+c)^n - c}{(b+c)^n - c} \leq a^n.$$

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 1991.

13.38. Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c egy$ háromszög oldalainak hossza, akkor

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1996/1997.

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 10. évfolyam, 2011.

13.39. Igazoljuk, hogy egy háromszögben teljesül a következő egyenlőtenség:

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Igaz-e az egyenlőtlenség tetszőleges a, b, c számok esetén?

Székely Mikó Matematikai Verseny, 10. évfolyam, 1991.

KöMaL, Gy. 2390.

13.40. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 11. évfolyam, 2005.

13.41. Bizonyítsa be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \geq \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

Matematika háziverseny, Óbudai Egyetem, 2015.

13.42. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

KöMaL, B. 3384.

13.43. Az x, y, z pozitív valós számok mindegyike kisebb 2-nél és $x^2+y^2+z^2=3$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{3}{2} < \frac{1+y^2}{2+x}+\frac{1+z^2}{2+y}+\frac{1+x^2}{2+z} < 3.$$

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 12. évfolyam, 2016/2017. tanév

13.44. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b, c páronként különböző valós számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3} > 8abc.$$

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 10. évfolyam, 2016/2017. tanév

13.45. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c valós számokra $0 < c \leq b \leq a$, akkor

$$2a+3b+5c-\frac{8}{3}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right).$$

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 10. évfolyam, 2016/2017. tanév

13.46. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 2003.

13.47. Egy háromszög oldalainak hossza a, b, c. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=2$, akkor

$$abc+1 \leq ab+bc+ca \leq abc+\frac{28}{27}.$$

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 11. évfolyam, 2011/2012. tanév

13.48. Legyenek x és y olyan valós számok, amelyekre $0 < x < 1$ és $x + y = 1$. Állapítsa meg a

$$K = x\frac{1+x^2}{1+x}+y\frac{1+y^2}{1+y}$$

kifejezés legkisebb értékét, továbbá azt is, hogy a kifejezés az x és y változók mely értékeinél veszi fel ezt az értéket.

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 11. évfolyam, 2013/2014. tanév

13.49. Az a és b pozitív számokra teljesül, hogy $a + b = ab$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} \geq \frac{1}{2}.$$

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny, 11. évfolyam, 2013/2014. tanév

13.50. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{ab}{a^2+3b^2} + \frac{bc}{b^2+3c^2} + \frac{ca}{c^2+3a^2} \leq \frac{3}{4}.$$

KöMaL, B. 4201.

13.51. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív számok összege nem nagyobb 3-nál, akkor

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{a}{1+b^2} + \frac{a}{1+c^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{a}{1+b} + \frac{a}{1+c}.$$

Fejér Lipót Matematikaverseny, 11. évfolyam, 2002.

13.52. Igazoljuk, hogy a és b nemnegatív, akkor

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{2} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

Fejér Lipót Matematikaverseny, 12. évfolyam, 1999.