Kalandozás a nevezetes egyenlőtlenségek világában

Besenyei Ádám
badam@cs.elte.hu

1. Rendezési egyenlőtlenség

1.1. Egy fiókban 10 forintos, egy másikban 20 forintos, egy harmadikban 50 forintos, egy negyedikben pedig 100 forintos érmék vannak. A fiókokból úgy vehetünk ki érméket, hogy az egyes fiókokból kivett érmék száma 3, 4, 5, 6, de ránk van bízva, milyen sorrendben. Melyik fiókból mennyi érmét vegyünk ki, hogy a kivett érmék összértéke a lehető legnagyobb legyen? Milyen esetben lesz a lehető legkisebb a kivett érmék összértéke?

Szűcs Adolf, 1935.

1.2. Tudjuk, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$ vagy $ay + bx$?

Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis 2 példatár, 1.140. feladat

1.3. Bizonyítandó, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ minden a, b, c-re fennáll!

Pósa Lajos: Összefoglalás, 433. feladat

1.4. Mely x és y valós számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$x + y + xy \geq x^2 + y^2 + 1.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 9. évfolyam, 2014/2015. tanév

1.5. Jelölje a téglatest felszínét A, testátlójának hosszát d, továbbá legyen $k \geq 2$ tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$kd^2 - A$$

sohasem lehet negatív.

OKTV, 1993/1994. tanév

1.6. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1963/1964. tanév

1.7. Igazoljuk, hogy nemnegatív a, b, c valós számok esetén

$$a^5b + b^5c + c^5a \leq a^6 + b^6 + c^6.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1974/1975. tanév

1.8. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

KöMaL, F. 2861.

1.9. Igazolja, hogy ha az x, y és z valós számokra teljesül az alábbi egyenlőség, akkor közülük valamelyik kettő egyenlő egymással:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1992/1993. tanév

1.10. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív $a \leq b \leq c$ számokra teljesül az

$$a^b b^c c^a \leq a^a b^b c^c$$

egyenlőtlenség!

Kárpátaljai versenyfeladat

KöMaL, B. 4291.

1.11. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3.$$

Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis 2 példatár, 1.144. feladat

1.12. Legyen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok egy tetszőleges permutációja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 1935.

2. Csebisev-egyenlőtlenség

2.1. Igazoljuk, hogy ha $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ valós számok, akkor

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n).$$

Csebisev-egyenlőtlenség, 1882.

2.2. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b pozitív valós számok, akkor

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis 2 példatár, 1.141. feladat

2.3. Igazoljuk, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

Számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség

2.4. Igazoljuk, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n.$$

Számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség

2.5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}.$$

KöMaL, F. 2639.