Egyváltozós analízis 2, 2016. tavasz, 2. zh megoldás

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! Adjuk meg, hogy melyik integrálási szabályt milyen szereposztással alkalmazzuk.

a) $\displaystyle\int \left((3-2x)^{12} + (e^2)^{-x}\right) dx$ b) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x}\right) dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\log 2x}{x}\, dx$ d) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

Megoldás. Több integrálás során is alkalmazzuk az $\int(f+g) = \int f + \int g$ és $\int \lambda f = \lambda \int f$ linearitási tulajdonságokat, ezeket külön nem fogjuk jelezni.

a) Az $\int f(ax+b)\, dx = \dfrac{F(ax+b)}{a} + C$ (ahol $F' = f$) lineáris helyettesítést először az $f(x) = x^{12}$, $F(x) = \dfrac{x^{13}}{13}$, $a = -2$, $b = 3$, majd pedig az $f(x) = F(x) = e^x$, $a = -2$, $b = 0$ szereposztással alkalmazva

$$\int \left((3-2x)^{12} + (e^2)^{-x}\right) dx = \int (3-2x)^{12}\, dx + \int e^{-2x}\, dx = \frac{(3-2x)^{13}}{13\cdot(-2)} + \frac{e^{-2x}}{-2} + C.$$

b) Az $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$ és $\int \lambda\, dx = \lambda x + C$ alapintegrálokat (és egy lineáris helyettesítést $a = 1$, $b = 1$ esetén) felhasználva

$$\int \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x}\right) dx = \int \left(\frac{(x+1)-1}{x+1} + 1 + \frac{1}{x}\right) dx =$$
$$= \int \left(2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right) dx = 2x - \log|x+1| + \log|x| + C.$$

c) Az $\int f^\alpha f' = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ szabályt az $f(x) = \log 2x$ és $\alpha = 1$ szereposztással alkalmazva

$$\int \frac{\log 2x}{x}\, dx = \int \log(2x)\cdot(\log 2x)'\, dx = \frac{\log^2 2x}{2} + C.$$

d) Egy parciális integrálást végrehajtva

$$\int \underset{f'}{e^x} \underset{g}{\sin} x\, dx = \underset{f}{e^x} \underset{g}{\sin} x - \int \underset{f}{e^x} \underset{g'}{\cos} x\, dx,$$

majd a jobb oldal második tagját ismét parciálisan integrálva

$$\int \underset{f'}{e^x} \underset{g}{\cos} x\, dx = \underset{f}{e^x} \underset{g}{\cos} x - \int \underset{f}{e^x} \underset{g'}{(-\sin x)}\, dx,$$

így

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx,$$

ahonnan átrendezéssel

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

□

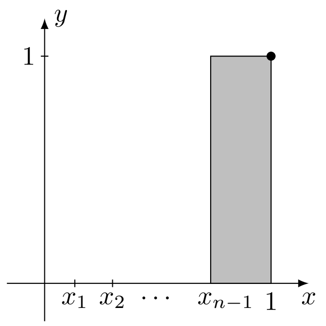
2. Feladat. Legyen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, amelyre $f(x) = 0$, ha $x \neq 1$ és $f(1) = 1$. Adjuk meg f alsó és felső összegeinek halmazát. Integrálható-e f?

Megoldás. Ha $F = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ egy tetszőleges felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, akkor bármely $[x_{i-1}, x_i]$ osztóintervallumon f infimuma 0, szuprémuma pedig egyetlen osztóintervallumon nem 0 (hanem 1), mégpedig az $[x_{n-1}, x_n]$-en. Ebből következően

$$s_F = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

valamint (lásd az 1. ábrát)

$$S_F = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_{n-1} = 1 - x_{n-1}.$$



1. ábra.

Emiatt az alsó összegek halmaza $\{0\}$; másrészt x_{n-1} a $[0,1)$ intervallum bármely pontja lehet ($x_{n-1} = 0$ esetén csupán a 0 és az 1 a két osztópont, de ez is felosztás), ezért a felső összegek halmaza a $(0,1]$ intervallum. Mindezek alapján az alsó összegek halmazának szuprémuma 0, a felső összegek halmazának infimuma is 0, tehát f integrálható a $[0,1]$-en és $\int_0^1 f = 0$. □

3. Feladat. Pali hosszas számolás után azt kapta, hogy $\int_{2016}^{2017} \frac{\sin x}{1+\log x}\,dx = \frac{2015}{2014}$. Megkérte Lalit, aki korábban sosem látta még a feladatot, hogy ellenőrizze a megoldást. Lali a számolásra rá sem nézve rögtön látta, hogy a végeredmény biztosan hibás. Hogyan következtetett erre Lali?

Megoldás. Vegyük észre (ahogy bizonyára Lali is tette), hogy $x \in [2016, 2017]$ esetén $\frac{\sin x}{1+\log x} \leq 1$, hiszen a szóban forgó intervallumon $\log x \geq 0$, tehát $1+\log x \geq 1$, így az ekvivalens átszorzás után a $\sin x \leq 1+\log x$ igaz egyenlőtlenséghez jutunk (a bal oldal legfeljebb 1, a jobb oldal legalább 1). Ha azonban az integrandus legfeljebb 1, akkor az $\int_a^b f \leq M \cdot (b-a)$ egyenlőtlenség (ahol $f \leq M$) alapján az integrál legfeljebb $1 \cdot (2017-2016) = 1$, tehát nem lehet egy 1-nél nagyobb szám, például $\frac{2015}{2014}$ sem. □

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5} = ?$$

Megoldás. Legyen

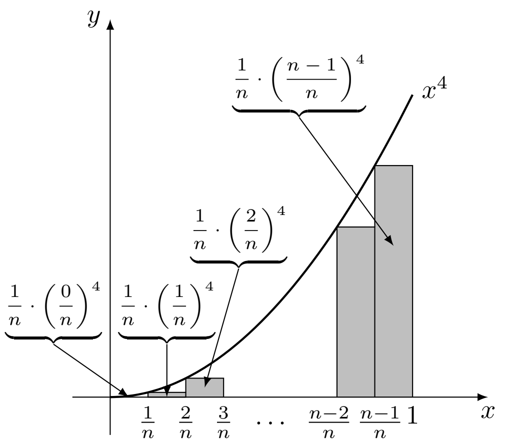
$$a_n = \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^4 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^4 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^4.$$

Az utóbbi alak sugallja számunkra, hogy célszerű tekintenünk az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ függvényt és a $[0,1]$ intervallum $F_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right)$ felosztásait $(n = 1, 2\ldots)$. Mivel f monoton növekedő és folytonos, így bármely osztóintervallumon az infimuma valójában minimum, amely az intervallum kezdőpontjában vétetik fel, továbbá a szuprémuma valójában maximum, amely pedig az intervallum végpontjában van, ezért (lásd a 2. ábrát)

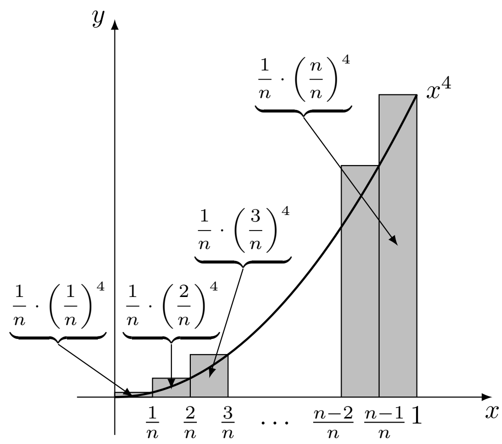
$$s_{F_n} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0}{n}\right)^4 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^4 = a_n - \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^4,$$

valamint (lásd a 3. ábrát)

$$S_{F_n} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^4 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^4 = a_n.$$



2. ábra.



3. ábra.

Használjuk most fel, hogy (definíció szerint)

$$s_{F_n} \leq \int_0^1 f \leq S_{F_n},$$

így

$$\int_0^1 x^4\,dx \leq a_n \leq \int_0^1 x^4\,dx + \frac{1}{n},$$

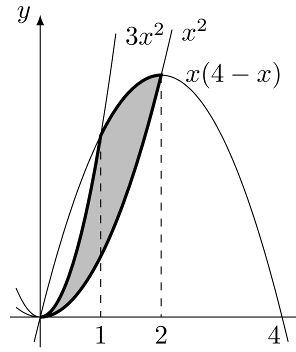
ahonnan a rendőrelv alapján

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}.$$

□

5. Feladat. Adott a síkon három (függőleges helyzetű) parabola: $y = 3x^2$, $y = x^2$, továbbá a harmadikról tudjuk, hogy átmegy az origón, a $(4,0)$ és az $(1,3)$ pontokon. Igazoljuk, hogy a három görbe által határolt korlátos síkidom területe 2.

Megoldás. Először írjuk fel a harmadik parabola egyenletét. Mivel átmegy a $(0,0)$ és $(4,0)$ pontokon, ezért a két zérushelye a 0 és 4, tehát az egyenlete szükségképpen $y = ax(4-x)$ alakú. Az a konstans értéke abból adódik, hogy $x = 1$ esetén $y = 3$, azaz $3 = 3a$, következésképpen $a = 1$, így $y = x(4-x)$. Az $y = x^2$ és $y = x(4-x)$ parabolák metszéspontjainak x koordinátáját az $x^2 = x(4-x)$ egyenlet megoldásai adják, ezek $x = 0$ és $x = 2$. Az $y = 3x^2$ és $y = x(4-x)$ parabolák metszéspontjainak x koordinátáját pedig a $3x^2 = x(4-x)$ egyenlet gyökei szolgáltatják, amelyek $x = 0$ és $x = 1$. Ezek alapján már felrajzolhatjuk a parabolákat és a szóban forgó síkidomot, lásd a 4. ábrán a satírozott részt. Az $x = 1$ egyenletű egyenes mentén kettévágva a síkidomot a két rész területét a normáltartományokra vonatkozó területképlet segítségével könnyedén számolhatjuk. A $[0,1]$-en a felső határoló a $3x^2$, az alsó az x^2 grafikonja, az $[1,2]$ intervallumon pedig felülről az $x(4-x)$, alulról az x^2 grafikonja határolja. Ennek megfelelően a síkidom területe



4. ábra.

$$T = \int_0^1 (3x^2 - x^2)\,dx + \int_1^2 \left(x(4-x) - x^2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left(8 - \frac{16}{3} - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

□

6. Feladat. Van-e olyan $b > 0$ szám, hogy az $f\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2$ függvény grafikonjának az x és az y tengely körüli megforgatásával nyert két forgástest térfogata megegyezik?

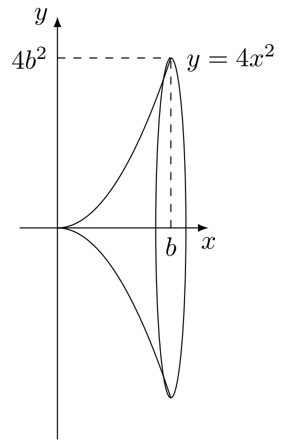
Megoldás. Az x tengely körüli forgatással kapott forgástest (lásd az 5. ábrát) térfogata az ismert formula alapján

$$\pi \int_0^b \left(4x^2\right)^2 dx = \pi \left[\frac{16}{5}x^5\right]_0^b = \frac{16}{5}b^5\pi.$$

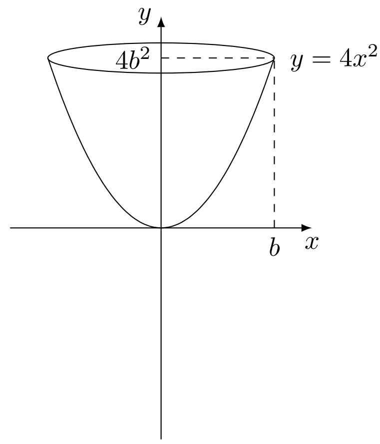
Az y tengely körüli forgatással nyert forgástest (lásd a 6. ábrát) egybevágó azzal a testtel, amelyet úgy kapunk, hogy f grafikonjának az $y = x$ egyenesre való tükörképét, más szóval f inverzének grafikonját forgatjuk az x tengely körül (lásd a 7. ábrát). Az $y = 4x^2$ egyenletből $x \geq 0$ esetén $x = \frac{\sqrt{y}}{2}$, így $f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{y}}{2}$. Másrészt f értékkészlete a $[0, 4b^2]$ intervallum, tehát $f^{-1}\colon [0,4b^2] \to [0,b]$. Ekkor f^{-1} grafikonjának az x tengely körüli forgatásával nyert forgástest térfogata

$$\pi \int_0^{4b^2} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{8}x^2\right]_0^{4b^2} = 2b^4\pi.$$

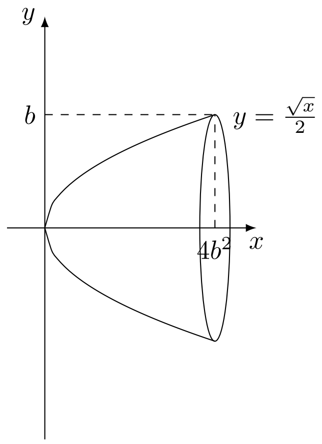
A kérdéses térfogatok akkor egyenlőek, ha $\frac{16}{5}b^5 = 2b^4$, ami $b > 0$ esetén azt jelenti, hogy $b = \frac{5}{8}$. □



5. ábra.



6. ábra.



7. ábra.