Egyváltozós analízis 2, 2016. tavasz, 1. zh megoldás

1. Feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + \sin x$. Igazoljuk a derivált segítségével, hogy f szigorúan monoton növő. Mennyi $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$?

Megoldás. A deriválási szabályok alapján $f'(x) = 3 + \cos x$, ahol $\cos x \geq -1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $f' \geq 2 > 0$ az egész számegyesen. Ebből következően f szigorúan monoton növekedő függvény, tehát invertálható. Vegyük észre, hogy $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$, így az inverz differenciálási szabályát felhasználva

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{3+\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3+\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

□

2. Feladat. Herbert, a kis hangya a sík $(-1,0)$ pontjából indulva halad úgy, hogy x perc elteltével az $(x-1, \sqrt{x}\,)$ pontban van tetszőleges x nemnegatív valós szám esetén. Mikor ér a $(0,1)$ pontba? Hol lesz a két pont közötti útja során Herbert a legközelebb az origóhoz?

Megoldás. Herbert $x = 1$ perc elteltével ér a $(0,1)$ pontba, hiszen csakis ekkor teljesül $x-1=0$ és $\sqrt{x}=1$. Herbert és az origó távolsága az $(x-1, \sqrt{x}\,)$ pont origótól vett távolága, azaz $\sqrt{\left((x-1)-0\right)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2-x+1}$. Ennek a függvénynek az abszolút minimumhelyét keressük $x \in [0,1]$ esetén. Mivel $\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$, ezért a minimumhely $x=\frac{1}{2}$, tehát $x=\frac{1}{2}$ idő elteltével, a $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ pontban lesz Herbert a legközelebb az origóhoz. Természetesen deriválás segítségével is megkereshetjük a minimumhelyet. Ekkor így okoskodhatunk. A négyzetgyök deriválását elkerülendő, inkább a távolság négyzetének abszolút minimumhelyét keressük meg, hiszen az ugyanaz, mint a távolság minimumhelye. Korlátos, zárt intervallumról lévén szó, a minimum létezik, és ez vagy az intervallum valamelyik végpontjában, vagy pedig a deriváltnak, az intervallum belsejébe eső egyik zérushelyében vétetik fel. Mivel $(x^2-x+1)' = 2x-1$, a távolságnégyzet-függvény deriváltjának zérushelye az $\frac{1}{2}$, így a szélsőértékhely-jelöltek a 0, az 1 és az $\frac{1}{2}$. E pontokban a távolságnégyzet rendre $1, 1, \frac{3}{4}$, következésképpen $x=\frac{1}{2}$ idő elteltével, a $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ pontban lesz Herbert a legközelebb az origóhoz. Megjegyezzük, hogy Herbert egy parabolaíven mozog, méghozzá az $x = y^2 - 1$ parabolának a $(-1,0)$ és $(0,1)$ pontjai közé eső ívén. □

3. Feladat. Végezzük el az $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$ függvény teljes vizsgálatát!

Megoldás. Világos módon az f függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Számítsuk ki f határértékét a $\pm\infty$-ben és a 0-ban mindkét oldalról:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3}{x}\right) = -\infty + 0 = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x^3+\frac{3}{x}\right) = +\infty + 0 = +\infty,$$
$$\lim_{x\to0-0}\left(x^3+\frac{3}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty, \qquad \lim_{x\to0+0}\left(x^3+\frac{3}{x}\right) = 0 + \infty = +\infty.$$

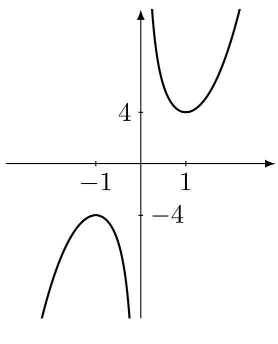
Számoljuk most ki az első és második deriváltakat, és keressük azok zérushelyeit. Egyrészt

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2},$$

így f' zérushelyei az $x^2 = \frac{1}{x^2}$ egyenlet valós megoldásai, azaz $x = \pm 1$. Másrészt pedig

$$f''(x) = 6x + \frac{6}{x^3},$$

amelynek nincs zérushelye, hiszen az $f''(x) = 0$ egyenértékű az $x^4 = -1$ egyenlettel, amelynek nem létezik valós megoldása. A deriváltak előjelével kapcsolatos tételek segítségével az alábbi táblázatot készíthetjük el:



1. ábra. Vázlatos grafikon

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	+	0	−	X	−	0	+
f''	−	−	−	X	+	+	+
f	↗	lok. min.: −4	↘	X	↘	lok. max.: 4	↗
	konkáv			X	konvex		

A táblázat és a limeszek alapján felrajzolható a függvény vázlatos grafikonja, amelyet az 1. ábrán láthatunk (nem méretarányosan!). Végül még leolvashatjuk, hogy f értékkészlete a $(-\infty,-4] \cup [4,\infty)$ halmaz. □

4. Feladat. Igazoljuk, hogy $x \geq 0$ esetén
$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

1. Megoldás. Mivel az $x \geq 0$ feltétel mellett az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív (sőt pozitív), ezért a négyzetreemelés ekvivalens, így elég belátnunk, hogy
$$1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{4},$$
ami a nyilvánvaló $0 \leq \frac{x^2}{4}$ egyenlőtlenséggel egyenértékű. $\square$

2. Megoldás. Differenciálszámítás segítségével is célhoz érhetünk. Legyen $f(x) = \sqrt{1+x}$ és $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$. Ekkor $f(0) = g(0) = 1$, továbbá $x > 0$ esetén
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2} = g'(x).$$
Alkalmazható tehát a gyakorlaton tanult tétel, így $f(x) \leq g(x)$ minden $x > 0$ esetén is. (Természetesen a fenti nyilvánvaló egyenlőtenség esetében is okoskodhatnánk az $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \leq 0 = g'(x)$ összefüggés alapján, de ez nem lenne túl elegáns.) $\square$

5. Feladat. Pisti nem használhat számológépet zárthelyi írása közben, de szüksége lenne $\cos\frac{1}{3}$ értékére 10^{-2} pontossággal. Segítsünk neki, és adjunk meg egy ilyen közelítő értéket!

Megoldás. A $\cos\frac{1}{3}$ közelítésére a $\cos x$ függvény 0 körüli, alkalmasan választott rendű Taylor-polinomjának az $\frac{1}{3}$-ban vett helyettesítési értéke megfelelő lesz. A rend meghatározásához a Lagrange-féle maradéktagot használjuk (és azt, hogy a cos függvény minden deriváltja $\pm\sin$ vagy $\pm\cos$ alakú):
$$\left|\cos\frac{1}{3} - T_{n,0}^{\cos}\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{(\cos x)^{(n+1)}|_{x=\xi}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3} - 0\right)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}}.$$
Mivel $n = 2$ esetén $(n+1)! \cdot 3^{n+1} = 6 \cdot 27 > 100$, ezért a $T_{2,0}^{\cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ másodrendű Taylor-polinomot választva az $x = \frac{1}{3}$ helyen a hiba már 10^{-2}-nél kisebb, így megfelelő pontosságú közelítést kapunk:
$$\cos\frac{1}{3} \approx T_{2,0}^{\cos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$
Megjegyezzük, hogy $\frac{17}{18} = 0,9\dot{4}$ és $\cos\frac{1}{3} \approx 0{,}9449$, tehát a közelítés hibája körülbelül 10^{-3}, ami azért van, mert a cos második Taylor-polinomja valójában a harmadik is, így a becslésnél egy nagyságrendet nyerhetünk. $\square$

6. Feladat. Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{tg} x \cdot \log x)$ határértéket!

Megoldás. Mivel $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{tg} x = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0+0} \log x = -\infty$, így a kérdéses határérték $0 \cdot \infty$ alakú kritikus limesz. A L'Hospital-szabály alkalmazásához a kifejezést alakítsuk törtté, $\operatorname{tg} x \cdot \log x = \frac{\log x}{\operatorname{ctg} x}$. Ez utóbbi $\frac{-\infty}{+\infty}$ alakú a $0+0$-ban, hiszen $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$. Ekkor a L'Hospital-szabály alapján (vigyázat: itt minden visszafele olvasandó!)
$$\lim_{x\to 0+0}(\operatorname{tg} x \cdot \log x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\log x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0+0} \sin x = -1 \cdot 0 = 0.$$
A $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$ határértéket kiszámolhattuk volna a L'Hospital-szabály ismételt alkalmazásával, hiszen ez $\frac{0}{0}$ alakú kritikus limesz. Ekkor (ismét visszafele olvasva!)
$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{2\sin x \cos x}{1} = 2\sin 0 \cos 0 = 0.$$
$\square$

7. Feladat. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényre $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ és $f'(3) = 1$. Igaz-e, hogy van olyan $c \in (0,3)$, amelyre $f''(c) = 0$?

Megoldás. Igaz. Alkalmazzuk először a Lagrange-középértéktételt az f függvényre a $[0,1]$ intervallumon, ekkor valamely $\xi \in (0,1)$ számra $f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2-1}{1} = 1$. Ez azt jelenti, hogy $f'(\xi) = f'(3)$, így az f' függvényre a $[\xi, 3]$ intervallumon teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, ezért létezik $c \in (\xi, 3) \subset (0,3)$, hogy $f''(c) = 0$. $\square$