Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

9. előadás (április 14.)

A hasznos kritériumot újra felírtam az óra elején, mert többször használjuk majd. Megemlítettem, hogy az $S_F - s_F$ kifejezést szokás oszcillációs összegnek is nevezni, és az $M_i - m_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]}$ értéket az f függvény $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon vett oszcilációjának („ingadozás") nevezzük.

Az óra fő célja, hogy két fontos függvényosztály elemeinek integrálhatóságát igazoljuk. Először a monoton, aztán pedig a folytonos függvényekét. Előbbi egyszerű alkalmazása a hasznos kritériumnak, utóbbi több előkészületet igényel, az egyenletes folytonosság fogalmát fogjuk bevezetni.

A monoton függvények integrálhatóságához először meggondoltuk, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor korlátos, sőt van maximuma és minimuma is, amelyek az intervallum végpontjában biztosan felvétetnek: növő esetben $a < y \implies f(a) \le f(y)$, tehát $f(a)$ minimum, hasonló módon $f(b)$ maximum. Ezen észrevételek alapján az $S_F - s_F$ összeget egyenletes felosztás (azaz $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$) esetén egyszerűbb alakban írhatjuk:

$$S_{F_n} - s_{F_n} = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Ha n elég nagy, akkor a jobb oldal tetszőleges $\varepsilon > 0$ számnál kisebb lesz, így teljesül a hasznos kritérium feltétele, van olyan $F = F_n$ felosztás, amelyre $S_F - s_F < \varepsilon$.

Rátértünk ezután az egyenletes folytonosság témakörére. Emlékeztetőként felírtam egy f függvény x_0 pontbeli folytonosságának fogalmát: f értelmezve van az x_0 egy környezetében, továbbá

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Ez egy lokális tulajdonság, az x_0 pontbeli tulajdonságot fejezi ki. Az $(0, 1)$ intervallumon tekintett $1/x$ függvény példáján megnéztük, hogy rögzített ε esetén a „jó" δ függ az x_0 pont helyzetétől: minél közelebb van x_0 a 0-hoz, annál kisebb δ „jó" csak, nem tudunk egy olyan δ számot megadni, amelyik minden x_0 pontban jó lenne az adott, rögzített ε-hoz. Amikor meg tudunk adni „univerzális" δ-t az adott ε-hoz, akkor az egy fontos tulajdonsága a függvénynek, ez az egyenletes folytonosság. Az f függvény egyenletesen folytonos a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha (ott nyilván értelmezve van és)

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in H(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ez egy globális tulajdonság, amely a H halmazon teljesül és nem egy adott pontban.

Példaként láttuk, hogy az $f(x) = x$ függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en, mert $\delta = \varepsilon$ megfelelő választás. Ezután az $f(x) = x^2$ függvény egyenletes folytonosságát igazoltuk az $[1, 2]$ intervallumon a múlt félévben megszokott becslési technikával. Végül beláttuk, hogy az $f(x) = 1/x$ függvény nem egyenletesen folytonos a $(0, 1)$ intervalumon: $\varepsilon = 1$ választáshoz nincs jó δ, mert $x_n = \frac{1}{n+1}$ és $y_n = \frac{1}{n}$ esetén elég nagy n-re $|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$, de $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 = \varepsilon$.

Felmerül a kérdés, hogy vajon mely függvényekről állíthatjuk biztosan az egyenletes folytonosságot. Kimondtam ezzel kapcsolatban Heine tételét, amely szerint ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (a múlt félévben ezt úgy értelmeztük, hogy (a, b) minden pontjában folytonos, a-ban balról, b-ben pedig jobbról folytonos), akkor egyenletesen folyonos $[a, b]$-n. A bizonyítás indirekt módon történt, használtuk a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt és a folytonosságra vonatkozó átvitleli elvet (a szép analízis bizonyítás egyik mintapéldája).

Végül a Heine-tétel alkalmazásként igazoltuk, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor integrálható $[a, b]$-n. Itt ismét a hasznos kritériumot ellenőriztük, az $S_F - s_F$ összeg most azért lesz „kicsi", ha F elég finom felosztás, mert minden i-re $M_i - m_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} f - \min_{[x_{i-1},x_i]} f$ „kicsi" az egyenletes folytonosságból következően.