Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

8. előadás (április 7.)

Az előadás elején emlékeztettem a múlt órán bevezetett fogalmakra, ahol $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény: *intervallum felosztása* ($F = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ véges sorozat, amelyre $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$); *osztópont* (az x_i pontok); *osztóintervallum* (az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok); *felosztás finomsága* ($\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$, vagyis az osztóintervallumok hosszainak maximuma); *felosztás finomítása* (véges sok új osztópont hozzávétele); *két felosztás közös finmomítása* (az osztópontok egyesítése); adott korlátos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén egy $F = (x_0, \dots, x_n)$ felosztáshoz tartozó *alsó és felső összegek*:

$$s_F(f) = s_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{[x_{i-1}x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$
$$S_F(f) = S_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Használni fogjuk az $m_i = \inf_{[x_{i-1}x_i]} f$ és $M_i = \sup_{[x_{i-1}x_i]} f$ házi jelöléseket, ezekkel

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \qquad S_F = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ezek után rátértünk az alsó és felső összegek tulajdonságaira. Beláttuk azt az egyszerű tényt, hogy minden felosztásra $s_F \le S_F$. Ezután arra hajtottunk, hogy ezt tetszőleges felosztásokra igazoljuk: $s_{F_1} \le S_{F_2}$. Ehhez először azt igazoltuk, hogy felosztás finomításakor az alsó összeg nem csökkenhet, felső összeg pedig nem nőhet. Ezt nyilván elég egyetlen új osztópont hozzávétele esetén belátni, mert utána csak ismételgetni kell. A bizonyítás lényege az, hogy ha $A \subset B \subset \mathbb{R}$ nemüres korlátos halmazok, akkor $\inf A \ge \inf B$ és $\sup A \le \sup B$.

Tudva, hogy finomítás során az alsó összegek nem csökkennek és a felső összegek nem nőnek, tetszőleges F_1, F_2 felosztások közös F finomítását véve, $s_{F_1} \le s_F \le S_F \le S_{F_2}$. Mindez azt is jelenti, hogy az alsó összegek halmaza felülről korlátos (bármely felső összeg felső korlátja), valamint a felső összegek halmaza alulról korlátos (bármely alsó összeg alsó korlátja).

Definiálhatjuk tehát az alsó összegek halmazának szuprémumát, ez az f Darboux-féle alsó integrálja, $\underline{\int_a^b} f$; továbbá a felső összegek halmazának infimumát, ez a Darboux-féle felső integrál, $\overline{\int_a^b}$.

Bármely korlátos f függvénynek van tehát alsó és felső integrálja (méghozzá egy valós szám), sőt, az alsó integrál legfeljebb akkor, mint a felső integrál. Ez utóbbi tulajdonság abból következik, hogy ha A és B olyan nemüres korlátos halmazok, amelyekre minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $a \le b$, akkor $\sup A \le \inf B$. Most A az alsó összegek, B pedig a felső összegek halmaza.

Egy korlátos függvényt Riemann-integrálhatónak nevezünk $[a,b]$-n, ha az alsó és felső integrálja megegyezik, ekkor ez a közös érték az f Riemann-integrálja (határozott integrálja) az $[a,b]$ intervallumon, jele $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\,dx$.

Példaként megnéztük a Dirichlet-függvényt a $[0,1]$-en, és beláttuk bármely F felosztásra $s_F = 0$, $S_F = 1$ (felhasználtuk, hogy bármely nem elfajuló intervallumban van racionális és irracionális szám). Ebből következően a Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$-en.

Második példa a konstans c függvény, amelyre minden F felosztás esetén $s_F = S_F = c(b-a)$, tehát $\exists \int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Harmadik példa: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Ez következik a múlt órán felírt alsó és felső összegekből (akkor még csak beírt és körülírt téglalapok területösszegéről beszéltünk).

Az óra végén igazoltunk egy „hasznos” kritériumot: az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists F$ felosztás, hogy $S_F - s_F < \varepsilon$. A bizonyításokban az alsó és felső integrál definícióját és a közös finomítás ötletét használtuk.