Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

6–7. előadás (március 31.)

Az óra elején emlékeztetőül felírtam azokat az integrálási szabályokat, amelyekre már a két héttel ezelőtti előadáson példákat is néztünk

$$
\begin{aligned}
\int (f+g) &= \int f + \int g, \\
\int \lambda f &= \lambda \int f, \\
\int f(ax+b)\,dx &= \frac{F(ax+b)}{a} + C \quad (a \neq 0, F' = f), \\
\int f^\alpha f' &= \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, f > 0), \\
\int \frac{f'}{f} &= \log|f| + C \quad (f \neq 0).
\end{aligned}
$$

Ezután hozzávettük először a parciális integrálás szabályát:

$$\int f'g = fg - \int fg',$$

feltéve, hogy f, g differenciálhatók és fg'-nek van primitív függvénye. Három példát néztünk:

$$\int xe^x\,dx, \qquad \int \log x\,dx, \qquad \int e^x \cos x\,dx.$$

Az első integrálnál megnéztük mindkét szereposztást, és láttuk, hogy melyik célravezető. A másodiknál a $\log x = 1 \cdot \log x$ trükköt alkalmaztuk és ugyancsak megbeszéltük, hogy mi a logikus szereposztás. A harmadik példában pedig kétszer integráltunk parciálisan, majd a kapott összefüggésből ki tudtuk fejezni a keresett integrált.

A következő integrálási szabály a helyettesítéses integrálás volt:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C,$$

feltéve, hogy g differenciálható, $R(g) \subset D(f)$ és $F' = f$. Ezt kétféleképpen alkalmazhatjuk, balról jobbra és fordítva. Az elsőre, amikor F ismert, példa volt

$$\int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^{t^2} 2t\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C.$$

A visszafele irányra, amikor F nem ismert (ez az „igazi" helyettesítés) a következő példákat néztük:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx &\underset{dx=2t\,dt}{\overset{x=t^2}{=}} \int \frac{1}{t+1} 2t,\,dt, \\
\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx &\underset{dx=\frac{1}{t}\,dt}{\overset{x=\log t}{=}} \int \frac{t^2}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt, \\
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &\underset{dx=\cos t\,dt}{\overset{x=\sin t}{=}} \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t\,dt.
\end{aligned}
$$

A jobb oldali integrálokat pedig már mind ki tudtuk számítani és a kapott függvénybe visszahelyettesítettük x-et.

Végül a racionális törtüggvények integrálásába kóstoltunk bele, de csak az elsőfokú/másodfokú esetet vizsgálva és csupán példákon keresztül. Amikor a nevezőnek nincs valós gyöke, ekkor teljes négyzetté alakítottunk:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + C,$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx \overset{\int \frac{f'}{f}=\log|f|}{=} \log|x^2+2x+5| - \text{előbbi}.$$

Ha a nevezőnek két különböző valós gyöke volt, akkor parciális törtekre bontottunk:

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}\right)dx = \frac{2}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\log|x+2| + C.$$

Végül ha a nevezőnek két azonos valós gyöke van:

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

(Valójában ez is parciális törtekre bontás, csak itt más a parciális tört, mint előbb, mert annak nem lenne értelme, hogy $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1}$ alakban írjuk fel.)

Ezzel befejeztük a határozatlan integrál témakörét és belekezdtünk a félév utolsó anyagrészébe, a határozott integrál témájába. Motivációként az x^2 függvény $[0,1]$ intervallum feletti grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét próbáltuk meghatározni. Alsó és felső közelítéseket írtunk fel úgy, hogy az intervallumot felosztottuk részintervallumokra, majd mindegyik fölé egy beírt és egy körülírt téglalapot emeltünk. A beírt téglalapok területösszege a szóban forgó síkidom területének alsó, a körülírt téglalapok területösszege pedig felső becslését adja. Így kaptuk, hogy ha egyáltalán létezik területe az adott síkidomnak, akkor az csakis $1/3$ lehet. A területfogalmat intuitívan használjuk (mindenkinek a fejében van erről valamiféle elképzelés), majd a későbbi analízis tanulmányok során tisztázzuk pontosan a matematikai jelentését.

A motivációt követően elkezdtük bevezetni az alapfogalmakat, amelyekkel az előbbi meseszerű levezetést formalizálhatjuk. A következő fogalmak szerepeltek: *intervallum felosztása* ($F = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ véges sorozat, amelyre $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$); *osztópont* (az x_i pontok); *osztóintervallum* (az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok); *felosztás finomsága* ($\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$, vagyis az osztóintervallumok hosszainak maximuma); *felosztás finomítása* (véges sok új osztópont hozzávétele); *két felosztás közös finmomítása* (az osztópontok egyesítése); adott korlátos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén egy $F = (x_0, \dots, x_n)$ felosztáshoz tartozó *alsó és felső összegek*:

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{[x_{i-1}x_i]} f\right)\cdot(x_i - x_{i-1}),$$

$$S_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}x_i]} f\right)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Használni fogjuk az $m_i = \inf_{[x_{i-1}x_i]} f$ és $M_i = \sup_{[x_{i-1}x_i]} f$ házi jelöléseket, ezekkel

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \qquad S_F = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$