Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

5. előadás (március 10.)

Új témakört kezdtünk: integrálszámítás. Ez két fő részből fog állni, határozatlan és határozott integrál. Az előbbivel két előadásnyit foglalkozunk. Nagyon leegyszerűsítve a következőről lesz szó. Eddig egy adott differenciálható függvényből kiindulva képeztük annak deriváltját. Most visszafelé gondolkodunk, adott egy függvény, és azt kérdezzük, hogy melyik függvénynek a deriváltja (ha egyáltalán létezik ilyen függvény). Sajnos ez egy sokkal nehezebb, sőt gyakran lehetetlen feladat. A deriválásra megvannak a szabályok, „akármilyen bonyolult” differenciálható függvényt tudunk deriválni, azonban a visszafele irányban csak igen korlátozott módszereink vannak, amelyek használata sem olyan egyszerű, mint a deriválás esetében. Példaképpen említettem, hogy van olyan függvény, amelynek deriváltja a $\sin x/x$, de azt az elemi függvényeink segítségével nem tudjuk felírni.

Ennyi bevezező után néhány példával folytattam (mese szinten), amelyek azt illusztrálják, hogy hol fordulnak elő ilyen fordított irányú, $f' \overset{?}{\to} f$ jellegű kérdések.

Elsőként egy fizikai példát említettem: ismerjük egy egyenes vonalú mozgást végző autó pillanatnyi sebességét leíró $v(t)$ függvényt, és keresendő, hogy a t időpillanatban mi a helyzete, $x(t)$. Arról van szó, hogy adott $v(t) = x'(t)$ és keresendő $x(t)$, amihez természetesen szükséges ismerni a kezdeti pozíciót.

A második példa a területszámításból származik: határozzuk meg az x^2 függvénynek a $[0, x]$ intervallum feletti grafikonja és az x tengely által közrezárt síkidom területét. A területet $T(x)$-szel jelölve beláttuk, hogy $(y - x)x^2 \le T(y) - T(x) \le y^2(y - x)$, így $T'(x) = x^2$. Rájöttünk, hogy $T(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (ahol C tetszőleges konstans) mind megoldás, és az integrálszámítás alaptételének segítségével igazoltuk, hogy más megoldás nincs. A C konstans értéke végül abból adódott, hogy $T(0) = 0$.

Egy harmadik példa a félgömb térfogata. Ezt csak vázoltam, a területszámításhoz hasonlóan járhatunk el, és egy $V(x)$ térfogatfüggvényt vezethetünk be egy megfelelő gömbszelet térfogatára és ennek deriváltját könnyen kiszámíthatjuk.

Ennyi motiváció után rátértünk a téma felépítésére. Definiáltam a primitív függvény fogalmát: az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye $F\colon I \to \mathbb{R}$, ha $F' = f$ az I intervallumon. Az integrálszámítás alaptételéből következően, ha f-nek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, és ezek konstansban térnek el egymástól. A primitív függvények halmazát f határozatlan integráljának hívjuk, amelynek jelölése: $\int f(x)\,dx$, vagy $\int f$. Beláttuk, hogy a szignumfüggvénynek $\mathbb{R}$-en nincs primitív függvénye. Ezután pedig felírtam az alapintegrálokat (ezt itt most nem részletezem, de tudni kell). Ezt követően jöttek az integrálási szabályok:

$$\int (f + g) = \int f + \int g,$$

$$\int \lambda f = \lambda \int f,$$

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C \quad (a \ne 0, F' = f),$$

$$\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \quad (\alpha \ne -1, f > 0),$$

$$\int \frac{f'}{f} = \log|f| + C \quad (f \ne 0).$$

Mindegyikre néztünk példákat is, ezeket sem részletezem.