Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

4. előadás (március 3.)

Az előadást a sin és cos Taylor-sorainak újbóli felírásával kezdtem. Azt még nem láttuk be, hogy a Taylor-sor valóban előállítja a függvényeket, ráadásul minden x valós szám esetén. Ehhez emlékeztettem a múlt órai elégséges feltételre, amelyet szóban úgy fogalmazhatunk, hogy ha a szóban forgó függvény deriváltjai egyenletesen korlátosak egy I intervalumon, akkor az intervallum bármely pontjához tartozó Taylor-sor előállítja a függvényt az I minden pontjában. Most a sin és cos mindegyik deriváltja $\pm\sin$ vagy $\pm\cos$ alakú, tehát nyilván egyenletesen korlátos az egész $\mathbb{R}$-en. Ezután megjegyeztem, hogy a sin Taylor-sorának részletösszegei váltakozva alulról, felülről közelítik a függvényt, pontosabban:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}, \quad (x > 0).$$

Azt hiszem, hogy itt az $x > 0$ feltételt lefelejtettem :(, ezt majd pótolom jövő órán (aki ezt olvassa, az már pótolhatja is). Ennek az összefüggésnek a $k = 1$ speciális esetét gyakorlaton bizonyítottuk az általam „hegymászós" tételnek nevezett segédállítás segítségével: ha f és g folytonos $[a, b]$-n és differenciálható az intervallum belsejében, továbbá $f(a) \le g(a)$ és $f'(x) \le g'(x)$, ha $x \in (a, b)$, akkor $f(x) \le g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén. A cos függvényre hasonló becslések igazak a megfelelő módosítással. Végül még arra is felhívtam a figyelmet, hogy nem véletlenül van csak páratlan kitevőjű hatvány a sin sorában, és csak páros kitevőjű hatvány a cos sorában. A sin ugyanis páratlan, a cos pedig páros függvény, és a „természet tudja a dolgát", a Taylor-sorba „felesleges belevenni" páros, illetve páratlan hatványfüggvényeket.

Ami innen a Taylor-sorok kapcsán következett, mind mese, ezek gyakorlaton nem lesznek és vizsgán sem fogom számonkérni. Inkább csak érdekesség, mert sokan valószínűleg nem találkoznak többet Taylor-sorokkal. Mutattam néhány további példát Taylor-sorokra. Először a $\log(1 + x)$ függvény 0 körüli sorát írtuk fel:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \le 1).$$

Itt annyit azért beláttunk, hogy $(\log(1 + x))^{(n)} = (-1)^n (n - 1)!(1 + x)^{-n}$, de azt nem igazoltam, hogy a sor a megfelelő intervallumon elő is állítja a függvényt. Ha ezt elhisszük, akkor $x = 1$ helyettesítéssel a Bevanal2 óráról már ismert formulát nyerjük:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Felírtam még az $\operatorname{arc\,tg} x$ sorát:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Ha itt $x = 1$-et helyettesítünk, akkor az alábbi, Leibniztől származó összefüggést nyerjük:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Végül a Newton-féle binomiális sorról beszéltem kicsit:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (|x| < 1),$$

ahol

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

Speciálisan α pozitív egész szám esetén a véges matek óráról ismert binomiális tételt kapjuk. Példaképpen felírtuk az $\alpha = \frac{1}{2}$ konkrét esetben az első néhány tagot:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots \quad (|x| < 1).$$

A Taylor-sorok témakört lezárandó, két alkalmazásról beszéltem. Az egyik a gyakorlaton szerepelt Taylor-polinomos közelítés, például számítuk ki $\sin 1$ vagy e értékét 10^{-2} pontossággal. Egy másik alkalmazás lehet határértékek számítása, erre egy konkrét példát mutattam, de ismét csak mese szinten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)}{x} = \lim_{x\to 0} (-1 + x + \dots) = -1.$$

Az előadás második felében a L'Hospital-szabályt mondtam ki a $0/0$ vagy $\pm\infty/\pm\infty$ alakú kritikus limeszekre: Az f, g függvények legyenek differenciálhatók az α (ami lehet $a \in \mathbb{R}$, $a+0$, $a-0$, $\pm\infty$) egy pontozott környezetében, továbbá ebben a környezetben g és g' nem egyenlő 0-val. Tegyük fel, hogy $\lim_\alpha f = \lim_\alpha g = 0$ vagy $\lim_\alpha g = \pm\infty$. Ekkor

$$\exists \lim_\alpha \frac{f'}{g'} (= b \in \mathbb{R} \text{ vagy } \pm\infty) \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_\alpha \frac{f}{g} = \lim_\alpha \frac{f'}{g'}.$$

Csak az $\alpha = a + 0$, $\lim_\alpha f = 0 \lim_\alpha g = 0$ speciális esetét bizonyítottuk a Cauchy-középértéktétel segítségével. Végül két példát néztünk. Mindegyik lépésben ellenőrizni kell a tétel alkalmazhatóságát, és az egészet visszafelé kell olvasni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6},$$

és $a > 1$ esetén

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \log a}{n x^n} = \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x (\log a)^n}{n!} = +\infty.$$

Ez utóbbi limeszt már korábban a nagyságrendek kapcsán is bizonyítottuk.