Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

2. előadás (február 18.)

Az óra elején újra felírtam a Lagrange-középértéktételt, mert lépten-nyomon használni fogjuk. Rögtöb kimondtam egy fontos következményét, az integrálszámítás alaptételét: ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és az (a,b)-n differenciálható, továbbá $f' = 0$ az (a,b)-n, akkor f konstansfüggvény. Lényeges, hogy f intervallumon van értelmezve, mert különben a tétel nem igaz: ha az f szakaszonként konstans függvény (diszjunkt intervallumok unióján), akkor is igaz, hogy $f' = 0$, azonban f nem feltétlenül konstans (csak, ha minden szakaszon ugyanaz a konstans az értéke).

Ezek után rátértünk a monotonitás és derivált témakörére. Emlékeztettem a (szigorú) monoton növekedés/csökkenés definícióira és felhívtam a figyelmet, hogy ez lényegesen más fogalom, mint a lokális növekedés/csökkenés (előbbi globális tulajdonság, utóbbi lokális). Azt is megjegyeztem, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pontosan akkor szigorúan monoton növő, ha monoton növő és nincs olyan nemelfajuló (azaz nem üres és nem egypontú) részintervallum $[a,b]$-n, amelyen f konstans. Ezt követően kimondtam azt a tételt, amely a monotonitást a deriválttal hozza kapcsolatba: ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és az (a,b)-n differenciálható, akkor

$$\begin{aligned} f \text{ monoton növő } [a,b]\text{-n} \quad &\iff \quad f' \geq 0 \text{ az } (a,b)\text{-n}, \\ f \text{ monoton csökkenő } [a,b]\text{-n} \quad &\iff \quad f' \leq 0 \text{ az } (a,b)\text{-n}. \end{aligned}$$

A $\Longrightarrow$ irány azon múlt, hogy az $[a,b]$-n monoton növekedésből következik (a,b) minden pontjában a lokális növekedés. A visszafele irányban a Lagrange-középértéktételt használtuk. Az integrálszámítás alaptételének segítségével rögtön adódott a következő ekvivalencia is: ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és az (a,b)-n differenciálható, akkor

$$f \text{ szigorúan monoton növő } [a,b]\text{-n} \quad \iff \quad \begin{array}{c} f' \geq 0 \text{ az } (a,b)\text{-n és nincs olyan nemelfajuló} \\ \text{részintervallum, amelyen } f' = 0. \end{array}$$

Ezzel egy elégséges feltételt is megfogalmazhatunk a szigorú monoton növekedésre vonatkozóan: ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és az (a,b)-n differenciálható, akkor

$$f' > 0 \text{ az } (a,b)\text{-n} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ szigorúan monoton növő } [a,b]\text{-n}.$$

Felhívtam a figyelmet, hogy az iménti következtetés már csak egyirányú, visszafele általában nem igaz, például $f(x) = x^3$ szigorúan monoton növő függvény, de $f'(0) = 0$. Példaképpen megnéztük az $f(x) = xe^{-x}$ függvény monotonitási szakaszait: $x \leq 1$ esetén szigorúan monoton növő, $x \geq 1$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő.

Ezt követően emlékeztettem a kétszer differenciálhatóság fogalmára: f kétszer differenciálható az a pontban, ha f differenciálható az a egy környezetében és az f' derivált függvény differenciálható az a pontban. Megfogalmaztam ezután egy elégséges feltételt szélsőérték létezésre a második derivált segítségével: ha f kétszer differenciálható a-ban és $f'(a) = 0$, akkor $f''(a) > 0$ esetén f-nek az a-ban lokális minimuma van, $f''(a) < 0$ esetén lokális maximuma. Ismét felhívtam a figyelmet, hogy ez csak elégséges feltétel, például $f(x) = x^4$-nek lokális minimuma van a 0 pontban, de $f''(0) = 0$. A tétel bizonyítását közös megegyezéssel kihagytam.

Rátértünk ezután a konvexitás és a derivált kapcsolatára. Először átismételtem a konvexitás fogalmát (és kifejezetten hangúlyoztam, hogy minden húrt kell tekinteni), majd kimondtam a tételt: ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és az (a,b)-n differenciálható, akkor

$$\begin{aligned} f \text{ konvex } [a,b]\text{-n} \quad &\iff \quad f' \text{ monoton növő } (a,b)\text{-n}, \\ f \text{ konkáv } [a,b]\text{-n} \quad &\iff \quad f' \text{ monoton csökkenő } (a,b)\text{-n}. \end{aligned}$$

Ezt a tételt, ha már a másikat nem, bebizonyítottam. Volt is zúgolódás :). A tételt összevetve a monotonitásról szóló korábbi eredményünkkel kapjuk, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és az (a,b)-n kétszer differenciálható, akkor

$$f \text{ konvex } [a,b]\text{-n} \quad \iff \quad f'' \geq 0 \text{ az } (a,b)\text{-n}.$$

Végül bevezettem az inflexiós pont fogalmát: f-nek az a pontban inflexiós pontja van, ha értelmezve van egy környezetben, folytonos a-ban (ebből persze következik a környezetben való értelmezhetőség, de azt szándékosan emeltem ki) és egy bal oldali környezetben konvex (konkáv), egy jobb oldali környezetben pedig konkáv (konvex). A definíció és a konvexitásnak a derivált monotonitásával való megfogalmazása alapján adódik, hogy inflexiós pontban f'-nek lokális szélsőértéke van, ezért $f''(a) = 0$ az inflexiós pont létezésének elégséges feltétele, ha f kétszer differenciálható az a pontban. A feltétel csak elégséges, hiszen az $f(x) = x^4$ függvényre $f''(0) = 0$, de a 0-ban nincs inflexiós pontja.

Az előadás végén még felírtam az $f(x) = e^x/x$ függvényt, hogy a következő órán ennek teljes függvényvizsgálatát el tudjuk végezni.