# Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

**11. előadás (április 28.)**

Az előadás elején még pár szóban visszatértem az integrálfüggvényre. A differenciálhatóságáról szóló tételt a múlt órán nem volt idő bizonyítani, most meg már kissé távol van, ezért inkább kihagytam. Helyette megnéztük példaként az $I(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$ függvény deriváltját: $I'(x) = \frac{1}{\log x}$. Második példaként a szignumfüggvény integrálfüggvényét szerettem volna felírni a $[-1,1]$-en, de valahogy ez nem jött össze rendesen :). A helyes képlet:

$$\int_{-1}^{x} \operatorname{sgn}\, x\, dx = \begin{cases} -x-1, & \text{ha } x < 0, \\ x-1, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Az ábra, amit felrajzoltam jó volt, csak a képlet nem. Jól látszik, hogy ez nem differenciálható a 0 pontban, vagyis az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételben lényeges feltétel az integrandus folytonosssága.

Rátértünk ezután a határozott integrál alkalmazásaira, elsőként a területszámításra. Elmondtam, hogy a terület fogalmát a későbbi analízis tanulmányok során pontosan tanuljuk, ez a Jordan-mérték. Most csak annyit meséltem erről, hogy a terület egy függvény, amely a sík bizonyos részhalmazaihoz rendel nemnegatív számot úgy, hogy néhány nagyon természetes tulajdonságot elvárunk. Többek között az additivitást, az egybevágóság-invarianciát, illetve egységnyi területként az egységnégyezet jelöljük ki. Belátható, hogy egyértelműen létezik ilyen területfüggvény, és azok a halmazok is meg vannak határozva, amelyekhez rendelhető terület, ezeket fogjuk később mérhető halmazoknak nevezni.

Bevezettem ezt követően a normáltartomány fogalmát, amelyet az $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények határoznak meg, ahol $f \geq g$:

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Ha $f, g$ integrálhatók, akkor $N$-nek van területe és az $\int_a^b (f-g)$. A bizonyításról csak annyit mondtam, hogy a $g = 0$ eset volt a határozott integrál kiindulópontja (adott felosztásoz tartozó beírt és körülírt téglalapok területeivel való közelítés). De mivel nem tudjuk mi is a terület ezért nem mentem bele a részletekbe, mindenkinek az eddig is létező intuíciójára van bízva (egyelőre). Példaképpen az egység sugarú negyedkör területét számoltuk ki: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Következett a forgástestek térfogata (háromdimenziós Jordan-mértéke). Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ függvény grafikonját az $x$ tengely körül megforgatva egy forgástestet kapunk. Ha $f$ integrálható, akkor a test térfogata $V = \pi \int_a^b f^2$. A bizonyításról anyit mondtam, hogy a térfogat alsó és felső közelítése egy adott felosztáshoz tartozó beírt és körülírt hengerekkel történik. A beírt hengerek térfogatösszege:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left( \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \right)^2 (x_i - x_{i-1}) = \pi \sum_{i=1}^{n} \left( \inf_{[x_{i-1},x_i]} f^2 \right) (x_i - x_{i-1}) = \pi s_F(f^2).$$

Körülírt hengerek esetén az térfogatösszeg $\pi S_F(f^2)$, így a térfogat csakis $\pi \int_a^b f^2$ lehet. Példaképpen kiszámoltuk az egység sugarú félgömb térfogatát.

Forgástestek esetében a felszínt is ki tudjuk számolni, ennek felírtam a képletét, méghozzá $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, de a bizonyításról semmit se mondtam. A felszín eleve egy nehezebb fogalom, mint a térfogat. Megemlítettem, hogy az a naív elképzelés, miszerint a felületet háromszöglapokkal határolt felülettel közelítve a felszínek is közel vannak egymáshoz, téves. Ennek kapcsán Schwarz példájáról ejtettem szót: egy hengerbe könnyedén írhatunk akármilyen nagy felszínű háromszöglapokkal határolt felületet, amelynek minden csúcsa a henger felületén van. A felszínképlet alkalmazásképpen az egység sugarú félgömb felszínét számoltuk ki.

Végül grafikon ívhosszának képletét írtam fel, $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Az ívhossz esetében működik az, hogy töröttvonalakkal közelítjük, erről ugyancsak lesz szó a későbbi félévben. Példaképpen az egységkör kerületét számoltuk ki.

Az előadás végén még szóban megemlítettem az improprius integrált, amikor nemkorlátos függvényt, vagy nemkorlátos intervallumon integrálunk. Bizonyos esetekben ezek az integrálok is léteznek, limesz értelemben. Éppen a körív hosszánál is egy ilyet számoltunk ki:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Az óra utolsó részében két aranyos történetet olvastam fel. Az egyik arról szólt, hogy az analízis (konkrétan a Larange-maradéktag) életet menthet :). A másik pedig arról, hogy miért kell unalmas és látszólag haszontalan dolgokat is tanulnunk matematikából.