Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

10. előadás (április 21.)

Az előadás első, rövidebbnek szánt részében bizonyítás nélkül mondtam ki „hihető” állításokat. A bizonyításokba azért nem mentem bele, mert nagy részt csak „játék az alsó és felső összegekkel”.

Kezdtem a határozott integrálnak az integrálás intervallumával kapcsolatos két fontos összefüggésével. Egyrészt, ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor annak bármely $[c, d]$ részintervallumán is integrálható (ennek szóban elmondtam a bizonyítását, hogy érzékeltessem, milyen gondolatokra van szükség). Másrészt pedig, ha f integrálható az $[a, b]$ és $[b, c]$ intervallumokon, akkor az $[a, c]$-n is és

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Ezt hívtam úgy, hogy a határozott integrál additivitása az integrálás intervalluma szerint.

Következtek ezután az integrál és algebrai műveletek kapcsolatai. Ha f, g integrálhatók $[a, b]$-n és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f, f + g, fg$ szintén integrálhatók $[a, b]$-n és

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f, \qquad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Ez utóbbi az integrandus szerinti additivitás. (Vigyázat, szorzatra nincs szabály!). Amennyiben f integrálható és $f > C > 0$ az $[a, b]$-n, akkor $1/f$ is integrálható. Az $f(x) = 1/x$, ha $0 < x < 1$ és $f(0) = 1$ függvény példája mutatja, hogy pozitív alsó korlát feltétele nem hagyható el.

Végül az integrál és egyenlőtlenségek témakörben kimondtam, hogy ha f integrálható $[a, b]$-n és ott $m \le f \le M$, akkor

$$m \cdot (b - a) \le \int_a^b f \le M \cdot (b - a).$$

Ennek következménye, hogy

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| \,.$$

Az előbbi egyenlőtlenség bizonyítását gyakorlaton megnézzük.

Mindezek után rátértünk az integrálás és differenciálás kapcsolatára, a Newton–Leibniz-tételre: ha $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható, $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b)-n differenciálható és $F' = f$, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \stackrel{\text{jel}}{=} [F]_a^b.$$

A bizonyítás lényege, hogy az $F(b) - F(a)$ különbséget teleszkopikus összeg alakban írjuk fel, és Lagrange-középértéktételt alkalmazva egy olyan összeget kapunk, amely az f alsó és felső összege közé esik.

Példaként kiszámoltunk néhány egyszerű integrált:

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}, \qquad \int_{-2}^{-1} \log x\, dx = \log - |-2| = -\log 2, \qquad = \int_1^2 \log x\, dx = \log 2.$$

Tisztáztuk ezt követően, hogyan fest a parciális integrálás szabálya határozott integrálokra: ha f, g folytonosak $[a, b]$-n, differenciálhatóak (a, b)-n, f', g' integrálhatóak $[a, b]$-n, akkor

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Példaként az $\int_1^2 x \log x\, dx$ integrált számoltuk ki.

Megnéztük ezután a helyettesítéses integrálást határozott integrálokra: ha f folytonos $[g(a), g(b)]$-n, g folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b) és g' integrálható $[a, b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

Példaként az $\int_0^1 \sin x\,dx$ integrált írtuk át $x = \sin t = g(t)$ helyettesítéssel. Ekkor $g(0) = 0$ és $g(\pi/2) = 1$, így az integrál az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt$ alakot ölti. Mivel a $[0, \pi/2]$ intervallumon $\cos t \geq 0$, ezért a gyökvonásnál az abszolútértékjel elhagyható, így $\cos^2 t$ integrálja marad. Ezt nem számoltam ki, mert egyszer már megtettük a határozatlan esetben. Házinak adtam, hogy számítsuk ki az értékét, amely $\pi/4$ (az egységkör negyedének területe).

Az előadás utolsó részében az integrálfüggvény fogalmát vezettem be. Eddig volt már szó primitív függvényről ($F' = f$), határozatlan integrálról (a primitív függvények halmazáról), határozott (vagy Riemann-) integrálról. Ha $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor f integrálfüggvénye:

$$I(x) := \int_a^x f \quad (x \in [a, b]).$$

Beláttuk, hogy I folytonos $[a, b]$-n, itt használtuk az integrál intervallum szerinti additivitását és a fenti egyenlőtlenséget. Kimondtam azt is, hogy ha f folytonos az x_0 pontban, akkor ott I differenciálható és $I'(x_0) = f(x_0)$. Ennek következménye, hogy ha f folytonos az $[a, b]$-n, akkor integrálfüggvénye (a, b)-n differenciálható, tehát I primitív függvénye f-nek (a, b)-n, vagyis minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.