Egyváltozós analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 4. félév, 2016. tavasz

1. előadás (február 11.)

Az előadás elején megbeszéltük, hogy az 1. zh-t a március 17-i előadáson írjuk. Az így elmaradó előadást a tavaszi szünet után március 31-én, csütörtökön 16–18 óra között pótoljuk. Cserébe március 16–22 között (a szünet előtt) elmaradnak a gyakorlatok. A második zh biztosan az utolsó héten lesz, nagy valószínűséggel az előadáson, de véglegeset pár hét múlva mondok. Az utolsó heti előadást már nem pótoljuk.

Ezt követően a tudnivalókról annyit mondtam, hogy változatlan minden, a honlapon elolvasható. Majd röviden ismertettem a tematikát: egyrészt befejezzük a differenciálszámításból hátramaradt fejezeteket, majd a félév további két harmadában az integrálszámítással foglalkozunk.

Ezután rátértünk a matematikára. Az előadás első felében átismételtük függvények lokális tulajdonságainak fogalmait és kapcsolataikat az adott pontbeli deriválttal. Mindez a múlt félév végén szerepelt, de idén is támaszkodunk rá, ezért nem árt újra felírni. Szó volt az adott pontbeli lokális növekedés, csökkenés, szigorú lokális csökkenés és növekedés, valamint (szigorú) lokális szélsőértékek (maximum/minimum) fogalmairól. Fontos tudatosítani, hogy a lokális csökkenés/növekedés, valamint a monoton növekedés/csökkenés fogalmai lényegesen különbözőek, előbbi egy adott pontbeli, utóbbi egy egész intervallumon (vagy valamilyen halmazon) való tulajdonság. Míg a lokális csökkenés szempontjából lényegtelen, hogy az adott ponttól „távol" hogyan viselkedik a függvény (csak egy környezetben), addig a monoton növekedés esetében az intervallumon minden egyes függvényérték szerepet játszik, ez egy globális tulajdonság. A lokális szélsőérték esetében is vigyázni kell, hogy ne keverjük a globális (vagy abszolút) szélsőértékkel, amely egy adott halmazra vonatkozik. Gyakorlaton majd feladatokon keresztül rávilágítunk arra, hogy egy lokális szélsőérték nem feltétlenül globális (hiszen máshol a függvény még felvehet nagyobb/kisebb értékeket), és egy globális sem feltétlenül lokális (ugyanis nem feltétlenül van a függvény a globális szélsőértékhely egy egész környezetében értelmezve). Ezek mind apróságnak tűnnek, de a tételek szempontjából nagyon lényegesek.

Kimondtam újra a következő állításokat, amelyek feltétele az, hogy f differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban (érdemes az ellenpéldákat megjegyezni, és akkor a helyes irányok már maguktól adódnak, nem keverjük össze):

$$
\begin{aligned}
f \text{ lokálisan növekedő } a\text{-ban} &\Longrightarrow f'(a) \geq 0 \\
f \text{ lokálisan növekedő } a\text{-ban} &\not\Longleftarrow f'(a) \geq 0 \quad \text{(például } x^2 \text{ a 0-ban)} \\
f \text{ szigorúan lokálisan növekedő } a\text{-ban} &\not\Longrightarrow f'(a) > 0 \quad \text{(például } x^3 \text{ a 0-ban)} \\
f \text{ szigorúan lokálisan növekedő } a\text{-ban} &\Longleftarrow f'(a) > 0 \\
f \text{ lokálisan csökkenő } a\text{-ban} &\Longrightarrow f'(a) \geq 0 \\
f \text{ lokálisan csökkenő } a\text{-ban} &\not\Longleftarrow f'(a) \leq 0 \quad \text{(például } x^2 \text{ a 0-ban)} \\
f \text{ szigorúan lokálisan csökkenő } a\text{-ban} &\not\Longrightarrow f'(a) < 0 \quad \text{(például } -x^3 \text{ a 0-ban)} \\
f \text{ szigorúan lokálisan csökkenő } a\text{-ban} &\Longleftarrow f'(a) < 0 \\
f\text{-nek loális szélsőértéke van } a\text{-ban} &\Longrightarrow f'(a) = 0 \\
f\text{-nek loális szélsőértéke van } a\text{-ban} &\not\Longleftarrow f'(a) = 0 \quad \text{(például } x^3 \text{ a 0-ban)}
\end{aligned}
$$

Ezt követően egy konkrét példát vettünk korlátos, zárt intervallumon vett szélsőérték-keresésre: $f(x) = x - x^2$ a $[0, 1]$-en. Weierstrass-tétele miatt létezik a maximum és minimum, amelyek az intervallum végpontjaiban vagy belső pontban vétetnek fel. Ha belső pontban, akkor egyben lokális szélsőértékről van szó, így ott a derivált 0. Célszerű tehát megkeresni a derivált zérushelyeit (most $f'(x) = 1 - 2x$), ekkor az intervallum végpontja mellett ezek (most $x = 1/2$) a zérushelyek lesznek a szélsőértékhely-jelöltek (de csak jelöltek, hiszen ahol a derivált 0, még nem biztos, hogy szélsőérték van). Nincs más hátra, mint ezekben a pontokban kiszámítani a függvényértéket, és kiválasztani a legnagyobbat (most $1/4$), legkisebbet (most 0). Házinak feladtam az $x - x^3$ függvény szélsőértékeinek meghatározását a $[0, 1]$ intervallumon. Felhívtam a figyelmet, hogy ezek a feladatok gyakran elemien, deriválás nélkül is megoldhatók, és kívánatos, hogy egy középiskolai tanár ne csak deriválással tudjon megoldani feladatokat, ha például nevezetes közepeket is lehet használni. A deriválás csak segíthet a végeredmény megsejtésében.

Rátértünk ezután a középértéktételekre. A Rolle-tétel szerint, ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és az (a,b)-n differenciálható, valamint $f(a) = f(b)$, akkor valamely $c \in (a,b)$ pontban $f'(c) = 0$ (más szóval a grafikon érintője c-ben vízszintes). A bizonyítás azon múlt, hogy lokális szélsőértékhelyen a derivált eltűnik. A Rolle-tétel általánosítása, hogy ugyanolyan simasági feltételek (ezt is említettem, hogy mindig arra vonatkozik, hogy folytonos, és hányszor differenciálható) mellett van olyan belső pont, ahol az érintő párhuzamos a grafikon két végpontját összekötő húrral, azaz $f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)$. A bizonyítás egy ügyes segédfüggvény (a grafikon és a húr előjeles távolsága) bevezetésén múlott, amely kielégítette a Rolle-tétel feltételeit. Végük a Cauchy-féle középértéktételt mondtam ki, erre később lesz szükségünk. Ha $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, továbbá az (a,b)-n differenciálható függvények, valamint $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a,b)$, akkor van olyan $c \in (a,b)$, amelyre $f'(c)/g'(c) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$. Erről annyit mondtam, hogy ez a Lagrange-középértéktétel kiterjesztése síkgörbére: megfelelő feltételek mellett a görbének van olyan érintője, amely párhuzamos a görbe két végpontját összekötő húrral. A bizonyításnak csak ötletét írtam fel, méghozzá a segédfüggvényt, amelyre Rolle tételét kell alkalmazni.