Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható. Ha egy megoldásban súlyos hiba van, a megoldásra akkor is nulla pontot adunk, ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson kimondott tételek és a gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Tétel volt előadáson, hogy..." vagy „Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy..."), kivéve, ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!**

1. Igazoljuk, hogy $x \geq 0$ esetén $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \log(1+x)$.

2. Határozzuk meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + e^{\operatorname{arctg} x}}{x + \log x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{\log x}{\operatorname{ctg} x}$

3. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

(a) $\displaystyle\int \left(2^{3x} + \frac{1}{3^{2x}}\right) dx$

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{1+2x^2}{x} + \frac{x}{1+2x^2}\right) dx$

4. Adjuk meg az $y'' = 4y' - 4y$ differenciálegyenletnek azt a megoldását, melyre $y(0) = 3$ és $y(2) = 7$.

5. Határozzuk meg azokat a $(0,\infty)$-en értelmezett függvényeket, amelyekre a következő állítás igaz: a grafikon tetszőleges pontjának az origótól mért távolsága ugyanakkora, mint amilyen hosszú az érintőnek az érintési ponttól az y tengelyig tartó szakasza!

6. Legyen $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| \neq 1 \\ 1, & \text{ha } |x| = 1. \end{cases}$

Adjuk meg az f alsó és felső összegeinek halmazát a $[-2,2]$ intervallumon. Riemann-integrálható-e f a $[-2,2]$ intervallumon?

7. Vannak-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, amelyekre igaz, hogy $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g'(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$, és

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = 2$?

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$ nem létezik?