Egyváltozós analízis 2, 2015. tavasz, 1. zh

Tudnivalók. Az 5. feladat 2 pontot ér a többi 1 pontot, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható, azonban súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson vagy gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Előadáson/Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy…”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. A megoldásra 90 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!** Jó munkát!

---

1. Számítsuk ki a következő függvények deriváltfüggvényeit!

   a) $\operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1}$

   b) $\dfrac{3x^2+\log_3 x+\log_x 3+\log_3 3}{2^x+1}$

2. Hol differenciálható az $f(x)=\{x\}\cdot(1-\{x\})$ függvény? Igaz-e, hogy f lokálisan nő a 2 pontban?

3. Bontsuk fel az 4-et két nemnegatív szám összegére úgy, hogy az egyik szám négyzetének és a másik szám köbének az összege a lehető legnagyobb legyen.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $x,y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, akkor $|\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y|\geq|x-y|$.

5. Végezzük el az $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ függvény teljes vizsgálatát!

6. Legyen $f\colon[0,2]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, amely kétszer differenciálható a $(0,2)$ intervallumon.

   a) Igazoljuk, hogy ha $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, akkor van olyan $c\in[0,2]$, amelyre $f''(c)=0$.

   b) Bizonyítsuk be, hogy található olyan $c\in(0,2)$ pont, amelyre $f''(c)=f(0)-2f(1)+f(2)$.

Egyváltozós analízis 2, 2015. tavasz, 1. zh

Tudnivalók. Az 5. feladat 2 pontot ér a többi 1 pontot, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható, azonban súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson vagy gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Előadáson/Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy…”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. A megoldásra 90 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!** Jó munkát!

---

1. Számítsuk ki a következő függvények deriváltfüggvényeit!

   a) $\operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1}$

   b) $\dfrac{3x^2+\log_3 x+\log_x 3+\log_3 3}{2^x+1}$

2. Hol differenciálható az $f(x)=\{x\}\cdot(1-\{x\})$ függvény? Igaz-e, hogy f lokálisan nő a 2 pontban?

3. Bontsuk fel az 4-et két nemnegatív szám összegére úgy, hogy az egyik szám négyzetének és a másik szám köbének az összege a lehető legnagyobb legyen.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $x,y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, akkor $|\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y|\geq|x-y|$.

5. Végezzük el az $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ függvény teljes vizsgálatát!

6. Legyen $f\colon[0,2]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, amely kétszer differenciálható a $(0,2)$ intervallumon.

   a) Igazoljuk, hogy ha $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, akkor van olyan $c\in[0,2]$, amelyre $f''(c)=0$.

   b) Bizonyítsuk be, hogy található olyan $c\in(0,2)$ pont, amelyre $f''(c)=f(0)-2f(1)+f(2)$.