Minden feladat 1 pontot ér, kivéve az 5. feladatot, amelyik 2 pontos, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható. Ha egy megoldásban súlyos hiba van, a megoldásra akkor is nulla pontot adunk, ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson kimondott tételek és a gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Tétel volt előadáson, hogy..." vagy „Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy..."), kivéve, ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!**

1. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

(a) $f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \sin\sqrt{x^2+1}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{3x^2 + \log_3 x + \log_x 3}{2^x + 1}$

2. Legyen $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

Számoljuk ki f deriváltját!

Igaz-e, hogy f lokálisan nő 0-ban? Igaz-e, hogy f lokálisan csökken 0-ban? Igaz-e, hogy f-nek lokális szélsőértéke van 0-ban?

3. Egy derékszögű háromszög egyik befogója az y tengelyen van, az átfogó egyik végpontja az origó, az átfogó másik végpontjának koordinátái nem negatívak, és a végpont az $y = 27 - x^2$ parabolán van. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak a koordinátáit úgy, hogy a háromszög területe maximális legyen!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, akkor $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$.

5. Végezzük el az $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ függvény teljes vizsgálatát!

6. Melyik nagyobb: 1000^{1001} vagy 1001^{1000}?