Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2016. ősz

9. előadás (november 22.)

Az előadás elején röviden emlékeztettem arra, hogy hol tartunk: határérték és rendezés témaköre, eddig szerepel a rendőrelv. Ebben a témakörben még két állítást mondtam ki és láttam be. Ha $a_n \le b_n$ és konvergensek, akkor $\lim a_n \le \lim b_n$, amit indirekt igazoltunk. Itt megjegyeztem, hogy ha $a_n < b_n$, akkor is csak $\lim a_n \le \lim b_n$-re következtethetünk, hiszen például $a_n = 0$ és $b_n = 1/n$ esetén a két sorozat limesze megegyzik. A másik állítás, hogy ha $\lim a_n < \lim b_n$, akkor egy indextől kezdve $a_n < b_n$. Ezt is igazoltam, direkt módon (de lehetne indirekt is az előzős állítás segítségével). Megjegyeztem, hogy ha $\lim a_n \le \lim b_n$, akkor nem következtethetünk $a_n \le b_n$ semmilyen indextől kezdve, ellenpéldaként tekintsük az $a_n = 1/n$ és $b_n = 1/(n+1)$ sorozatokat.

Rátértünk ezt követően a limesz és műveletek kapcsolatára. Először a limesz és az összeg kapcsolatát írtuk foglaltuk össze egy táblázatban. A bizonyításokban legtöbbször a háromszög-egyenlőtlenséget és konvergens sorozatok korlátosságát használjuk, illetve azt, hogy $|a_n - a|$ és $|b_n - b|$ pici, ha n elég nagy (az, hogy milyen picivé kell tenni, abból adódik, hogy a becslés végén ε-t szeretnénk kapni). Beláttuk, hogy ha $a_n \to a$, $b_n \to b$, akkor $a_n + b_n \to a + b$. Megnéztük ezután az összeg határértékének néhány többi esetét is: $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$, ekkor $a_n + b_n \to \infty$; $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = \infty$, ekkor $a_n + b_n \to \infty$. A maradék eset hasonlóan igazolható. Ezután példákat néztünk a kritikus határértékekre, konkrétan, amikor $\lim a_n$ és $\lim b_n$ közül az egyik ∞, a másik $-\infty$. Ebben az esetben $a_n + b_n$ viselkedése a konkrét sorozatoktól függ, mind a négy kategóriába eső példát lehet adni, és adtunk is: $a_n = n$, $b_n = -n$ esetén $a - n + b_n = 0 \to 0$; $a_n = 2n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = n \to \infty$; $a_n = n$, $b_n = -2n$ esetén $a_n + b_n = -n \to -\infty$; $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = (-1)^n$.

Következett a limesz és szorzás műveletének kapcsolata. Rögtön ki is mondtam azt a tételt, hogy mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ határértékről, amennyiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$: a választ egy táblázatban foglaltuk össze. Bizonyításképpen megnéztük az $a = b = \infty$, az $a > 0$ és $b = \infty$, valamint az $a, b \in \mathbb{R}$ eseteket; a többit házi feladatnak adtam fel (de vizsga előtti konzultáción mindent meg lehet kérdezni). A kritikus határértékekre is néztünk példát, méghozzá láttuk, hogy $a = 0$, $b = \infty$ esetén a szorzatsorozat viselkedése mind a négyféle kategóriába eshet: $a_n = 1/n$, $b_n = n$ esetén $a_n b_n = 1$, tehát konvergens; $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n = n$, tehát $a_n b_n \to \infty$; $a_n = -1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n \to -\infty$; $a_n = (-1)^n/b$, $b_n = n$ esetén $(a_n b_n)$ oszcillálva divergens. Azt is megjegyeztem, hogy a limesz és műveletek kapcsolata csak véges sok tag, vagy tényező esetén érvényes. Például az n tagú $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ összeg minden tagja 0-hoz tart, de az összeg minden n-re 1. Hasonlóan, az $(1 + \frac{1}{n})^n$ szorzat mind az n tényezője 1-hez tart, de a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $(1 + \frac{1}{n})^n \ge 2$, tehát ha egyáltalán van limesze, akkor az mindenképpen legalább 2.

Kimondtam, hogy ha $a_n \to a$, $b_n \to b$, ahol $b \ne 0$, akkor $a_n/b_n \to a/b$. Itt megjegyeztem, hogy ha $b_n \to 0$, akkor $(1/b_n)$ kritikus limesz: $b_n = 1/n$ esetén $1/b_n = n \to \infty$, $b_n = -1/n$ esetén $1/b_n = -n \to -\infty$ és $b_n = (-1)^n/n$ esetén $1/b_n = (-1)^n$ oszcillálva divergens.