Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2016. ősz

8. előadás (november 15.)

Az órát az (n^p) sorozattal kezdtem ismétlésként. Újra megnéztük a limeszeket a különböző p értékek esetén. Ezután az (a^n) sorozattal folytattuk, beláttuk az $a^n \to \infty$ konvergenciát az $a > 1$ esetben a Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével. Igazoltuk (visszavezetéssel), hogy $|a| < 1$ esetén $a^n \to 0$, illete $a \leq -1$ esetén (a^n) oszcillálva divergens (ezt HF-nek adtam, de ilyet láttunk korábban). Ezután kimondtam, hogy $a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$, ezt az előző típusú határértékre vezettük vissza n-edikre emeléssel. Végül az $\sqrt[n]{n} \to 1$ határértéket igazoltuk a számtani és mrtani közepek egyenlőtlenségének alkalmazásával

A következő témakör a sorozatok átrendezése volt. A (b_n) sorozat az (a_n) egy átrendezése, ha van olyan $\pi \colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ bijekció (permutáció), hogy $b_n = a_{\pi(n)}$. Például az $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots$ sorozat egy átrendezése az $1/2, 1, 1/4, 1/3, 1/6, 1/5, \ldots$ sorozat, ahol most $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 3$, $\ldots$, hiszen $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_4$, $b_4 = a_3, \ldots$. A határérték második definíciója alapján azonnal adódik, hogy az átrendezés nem változtatja meg egy sorozat besorolását a határérték szempontjából. Az átrendezás után a részsorozat következett. Ha $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ pozitív egészek sorozata, akkor a $b_k = a_{n_k}$ sorozat az (a_n) sorozat egy részsorozata. A definíció alapján ismét könnyű látni, hogy ha (a_n)-nek a határértéke a (amely lehet véges vagy végtelen, akkor minden részsorozatának is ez a határértéke. Végül megjegyeztük, hogy véges sok tag elhagyása vagy hozzávétele ugyancsak nem befolyásolja a sorozat besorolását.

Ezután következett a határérték és rendezés témaköre. Kimondtam a fő tételünket, a rendőrelvet, amelyet három részre bontottam: 1. ha $a_n \leq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$; 2. ha $a_n \geq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to -\infty$, akkor $b_n \to -\infty$; 3. ha $\lim a_n = \lim c_n$ (véges vagy végtelen) és egy küszöbtől kezdődően $a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$. Példaként meghatároztuk az $\sqrt[n]{10 + (-1)^n}$ és $\sqrt[n]{2^n + n}$ sorozatok limeszét.