Bevezető analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2016. ősz

7. előadás (november 8.)

Az előadás elején röviden felidéztek a konvergenciáról eddig tanultakat.

Ezt követően a végtelenhez tartó sorozatok témakörével kezdtünk foglalkozni. Két definíciót mondtam,először a következőt: minden K valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(K, +\infty)$ félegyensen kívül. A másik definíció a küszönszámos: az (a_n) sorozat végtelenhez tart, ha minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan N küszöbindex (vagy küszöbszám), hogy minden $n > N$ esetén $a_n > K$.Beláttuk a két definíció ekvivalenciáját, majd bevezettem a szokásos $a_n \to \infty$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelöléseket. Példaként megnéztük az $a_n = n$ és $a_n = \sqrt{n}$ sorozatok végtelenhez tartását az első definíció szerint. Az utóbbi sorozatot egy „fáradékony bolhával" szemléltettem. A bolha n-edik lépése $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ekkor a lépések hossza 0-hoz tart, de a bolha akármilyen messze eljut.

Következett ezután a $-\infty$-hez tartás két definíciója. Az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden K valós számhoz található olyan N küszöbindex (vagy küszöbszám), hogy minden $n > N$ esetén $a_n < K$. Ezzel ekvivalens (az ekvivalenciát házi feladatnak adtam), hogy minden K valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(-\infty, K)$ félegyenesen kívül. Bevezettem az oszcillálva divergens sorozat elnevezést az olyan sorozatokra, amelyeknek se véges, se $\pm\infty$ határértéke nincs. Tisztáztuk, hogy ha (a_n) divergens, akkor lehet $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$ és (a_n) oszcillálva divergens is. Ha pedig azt mondjuk, hogy (a_n)-nek van határértéke, akkor az jelentheti, hogy konvergens, $a_n \to \infty$ vagy $a_n \to -\infty$.

Ezután a határérték és korlátoság témakörének tárgyalása következett. Beláttuk, hogy ha (a_n) konvergens, akkor korlátos (vagyis az $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz korlátos). Az $a_n = (-1)^n$ sorozat példája mutatja, hogy ez megfordítva nem igaz. Igazoltuk, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, de felülről nem korlátos. Kimondtam, hogy ha $a_n \to -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos, de alulról nem; a bizonyítást házi feladatnak adtam. A tételek alkalmazásával megmutattuk, hogy az $a_n = (-2)^n$ sorozat oszcillálva divergens, hiszen sem alukról, sem felülről nem korlátos (ezt csak szóban vázoltam).

Az óra utolsó részében néhány konkrét sorozat határértékének vizsgálatának láttunk neki. Az (n^p) sorozat határértéke 1, ha $p = 0$; ∞, ha $p > 0$ és egész; továbbá 0, ha $p < 0$ és egész. A többi nevezetes határérték a következő órán jön.