Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2016. ősz

6. előadás (március 17.)

Az előadás elején felidéztem a múlt óráról a hatványozással kapcsolatosan megbeszélteket. Tekintsük a következő halmazokat adott $x \in \mathbb{R}$ és $a > 1$ esetén:

$$A := \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \qquad B := \{a^s : x < s, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tételként kimondtam, hogy $\sup A = \inf B$. A bizonyításnak azt a részét megnéztük, hogy $\sup A \leq \inf B$. Ehhez segédállításként beláttuk, hogy ha $a > 1$ valós és $r < s$ racionális számok, akkor $a^r < a^s$. Ebből az egyenlőtlenség a szuprémum és infimum tulajdonságai alapján adódtak.

A bizonyítás második felét, nevezetesen az egyenlőség igazolását kihagytam, szóban vázoltam, hogy mit kellene megmutatni (minden $\varepsilon > 0$ esetén találni $a \in A$ és $b \in B$ elemeket, amelyre $|a - b| < \varepsilon$). A tétel után kézenfekvő módon adódik a^x definíciója, amely legyen $a^x := \sup A = \inf B$. Ha $0 < a < 1$, akkor legyen $a^x = 1/(1/a)^x$, végül pedig $1^x = 1$. Ezzel a^x-t minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmeztük. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált hatványfogalom rendelkezik a megszokott műveleti tulajdonságokkal, ezeket csak kimondtam.

Ezt követően rátértünk a sorozatok konvergenciájának témakörére. Először felidéztem a sorozat fogalmát (egy sorozat valójában függvény, de a fejünkben továbbra is $a_1, a_2, \dots$). Sok példát mutattam sorozatok különböző megadására: explicit megadás ($a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n$), rekurzív (Fibonacci; $a_0 = 0, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$; $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}}$) és egyéb definícióval adott (a_n az n-edik prímszám; a_n a $\sqrt{2}$ végtelen tizedestört alakjának n-edik tizedes jegye). Ezután az $a_n = 1/n$, $a_n = (-1)^n/n$ és $a_n = (-1)^n$ sorozatok kapcsán megfigyeltük a 0-hoz tartás és nemtartás jelenségét. A példák által motiválva megfogalmaztam a sorozat határértékének első (a küszöbszámos) definícióját: az (a_n) sorozat határértéke $b \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \; \forall n > N \; |a_n - b| < \varepsilon.$$

Rögtön megjegyeztem, hogy az n_0 küszöbindexnek nem kell egésznek lennie, ezért küszöbszámról beszélünk. Ezután megfogalmaztam a határérték második definícióját: az (a_n) sorozat határértéke a $b \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ véges sok kivétellel teljesül (más szóval az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van az $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ intervallumon kívül). Beláttuk, hogy a két definíció egymással ekvivalens. Ezt követően példákat néztünk határértékre és küszöbindexekre: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n/n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Igazoltuk, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak nincs határértéke. Végül bevezettem a konvergens és divergens sorozat elnevezést.