

Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2015. tavasz

4. előadás (október 9.)

Az előadás elején megismételtem a Cantor-axiómát.

Kimondtam ezután, hogy minden $a > 0$ számhoz található olyan $b > 0$ szám, amelyre $b^2 = a$. A bizonyítás fő gondolata az intervallumfelezési eljárás („oroszlánfogás”). Konstruáltunk olyan $I_n = [a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumokat, amelyekre $a_n^2 \leq a \leq b_n^2$, továbbá $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$. Ekkor a Cantor-axióma miatt a metszetük nem üres, legyen egy eleme x . Nem nehéz megmutatni (becsléssel), hogy $|x^2 - a| \leq c/n$, ami csak úgy lehetséges, hogy $x^2 = a$. Megbeszéltük azt is, hogy a b szám egyértelmű, hiszen, ha $0 < b_1 < b_2$, akkor $b_1^2 < b_2^2$, ami az axiómákból levezethető (ezt csak szóban vázoltam). Szokásos jelölés: $b = \sqrt{a}$. Hasonlóan igazolható (de nem láttam be), hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $a > 0$ számokhoz egyértelműen létezik $b > 0$ szám, amelyre $b^n = a$. Ennek jelölése $\sqrt[n]{a}$.

Ezt követően rátértünk a tizedestörtekre. Megbeszéltük, hogy véges tizedestört alatt az

$$n, a_1 a_2 \dots a_k = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k}$$

alakú számokat értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Azt mondjuk, hogy az $x \geq 0$ szám végtelen tizedestört alakja $n, a_1 a_2 a_3 \dots$, ha $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (ahol $j = 1, 2, 3 \dots$), továbbá

$$\begin{aligned} n &\leq x \leq n + 1, \\ n, a_1 &\leq x \leq n, a_1 + \frac{1}{10}, && \vdots \\ n, a_1 a_2 \dots a_k &\leq x \leq n, a_1 a_2 \dots a_k + \frac{1}{10^k}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Két kérdést fogalmaztam meg: létezik-e minden nemnegatív valós számnak végtelen tizedestört alakja? Adott végtelen tizedestörthöz található-e olyan x valós szám, amelynek éppen az a végtelen tizedestört alakja? Konstruktív módon bebizonyítottam, hogy minden $x \geq 0$ számnak van végtelen tizedestört alakja. Ezután pedig a Cantor-axióma segítségével beláttuk, hogy minden végtelen tizedestört egyértelműen meghatároz egy valós számot, amelynek az a végtelen tizedestört alakja.

Végül a tizedes tört alak egyértelműségének kérdéséről beszéltem. Egy példát mutattam ($0,99\dots = 1,00\dots = 1$), illetve megemlítettem, hogy minden pozitív számnak egyértelmű a végtelen tizedestört alakja, kivéve a véges tizedestörteket, amelyeknek kétféle alakjuk van (az egyikben egy indextől kezdve minden jegy 0, a másikban 9).