Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2015. tavasz

3. előadás (október 4.)

Az órán a valós számok axiómáit tárgyaltuk. A testaxiómák $\mathbb{R}$ algebrai tulajdonságait rögzítik. Adott két művelet, az összeadás és szorzás. Az összeadásra a következőket írjuk elő: kommutativitás, asszociativitás, nullelem létezése és ellentett elem létezése. A szorzás esetében ugyancsak megkívánjuk a kommutativitást, asszociativitást, ezenkívül a nullelemtől különböző egységelem létezését, illetve a nullelem kivételével a reciprok létezését. Az összeadást és szorzást a disztributivitás axiómája kapcsolja össze. Az olyan struktúrákat, amelyekben mindez a 9 axióma teljesül, testeknek szokás hívni. Megjegyeztem, hogy a $\{0, 1\}$ halmaz modulo 2 műveletekkel test.

Ezután megbeszéltük az axiómák néhány következményét, többek között azt, hogy az ellentett és a reciprok egyértelmű, amelyeket szokás szerint $-a$ és $\frac{1}{a}$ fogja jelölni. Ezenkívül kimondtam, hogy $a \cdot 0 = 0$ és $(-1) \cdot a = -a$ minden a-ra.

Ezt követően a rendezési axiómákra tértünk rá. Bevezettük az $a < b$ relációt, és erre előírtuk a trichotómiát, tranzitivitást, valamint összekapcsoltuk az összeadás és szorzás műveletével ($a < b \implies a + c < b + c$, illetve $(a < b) \wedge (0 < c) \implies ac < ac$). Ezzel az újabb 4 axiómával egy rendezett testet kapunk. A rendezés segítségével bevezethetjük a pozitív, negatív számok elnevezéseket. Használhatjuk továbbá az $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ jelöléseket is. Értelmezhetjük ezenkívül a nyílt, zárt, egyik oldalról nyílt, másikról zárt intervallumokat, a nyílt, zárt félegyeneseket.

Bevezettük ezután az abszolútérték fogalmát. Kimondtam a háromszög-egyenlőtlenség klasszikus változatát ($|a + b| \leq |a| + |b|$).

Tételként igazoltam, hogy $0 < 1$. Ennek következménye, hogy $1 + 1 + \cdots + 1$ mind különböző, és ezek halmazát neveztem pozitív egészeknek, amelyet $\mathbb{N}^+$-szal jelöltem. Az egész számok halmaz ebből a 0 és az ellentett elemek hozzávételével kapható, jelölése $\mathbb{Z}$. Az a/b alakú számok halmazát, ahol a, b egészek és $b \neq 0$, a racionális számok halmazának nevezzük, jelölése $\mathbb{Q}$.

Következett az arkhimédészi axióma, amely az előzőekből nem vezethető le. Alkalmazásként kimondtam és beláttam, hogy bármely két különböző valós szám között van racionális szám.

Végül definiáltam az egymásba skatulyázott intervallumok fogalmát és kimondtam a Cantor-axiómát. Utolsó példaként megmelítettem, hogy egymásba skatulyázott nyílt intervallumok metszete lehet üres, például $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \emptyset$.