Bevezető analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2016. ősz

12. előadás (december 13.)

A mai előadás témája a konvex és konkáv függvények voltak. Mindent csak a konvex esetben mondtunk ki, mert ebből a konkáv függvényekre vonatkozó eredmények könnyen adódnak a konkávitás definíciójának segítségével. A grafikus motiváció után konvexnek neveztünk egy függvényt egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ pontjai esetén esetén minden $x_1 < x < x_2$ közbülső pontra $f(x) \le h_{x_1,x_2}(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$. (Szemléletesen „a grafikon a húr alatt fekszik az (x_1,x_2) intervallumon".) Egy függvényt konkávnak hívunk, ha $(-f)$ konvex, vagyis az előző definícióban az $f(x) \ge h_{a,b}(x)$ módosítást kell végrehatjani. Szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv egy függvény, ha az iménti egyenlőtlenségekben szigorú egyenlőtlenség érvényes.

Ezután példaképpen ellenőriztük (ami szemléletesen világos), hogy az x^2 függvény konvex $\mathbb{R}$-en és az $1/x$ függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on. Az is világos, hogy bármely lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv is $\mathbb{R}$-en.

Egy kis grafikus motiváció után kimondtuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Ha f konvex az I intervallumon, akkor bármely $a < b \in I$ és $0 < t < 1$ esetén

$$f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b).$$

A $ta+(1-t)b$ kifejezést az a,b pontok konvex kombinációjaként szokás emlegetni. A Jensen-egyenlőtlenség bizonyítása a konvexitás definícióján múlik, egyszerűen az $x = ta+(1-t)b$ pontra kell alkalmazni (persze kérdés, hogy valóban $a < x < b$). Ezután megjegyeztem, hogy az előzőekben valójában sehol nem lényeges, hogy $a < b$, mert $h_{a,b}(x) = h_{b,a}(x)$ (bár ránézésre különbözőek). Mindezek után kimondtam az általános Jensen-egyenlőtlenséget: ha $a_1, \dots a_n \in I$ és $0 < t_1, \dots, t_n < 1$, $t_1+\dots+t_n = 1$, akkor

$$f(t_1a_1+\dots+t_na_n) \le t_1f(a_1)+\dots+t_nf(a_n).$$

Az indukciós bizonyításnak az egyszerűség kedvéért csak azt a speciális esetét néztük meg, amikor az $n = 2$-ről $n = 3$-ra való áttérés van (az általános eset hasonló, csak többet kell írni és könnyebb belekavarodni).

A Jensen-egyenlőtlenségnek az x^2 függvényre való alkalmazásaként megkaptuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget, valamint az $1/x$ függvényre való alkalmazásaként a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget.

Az óra maradék részében a konvexitás egy ekvivalens átfogalmazását tárgyaltuk. Az f konvex az I intervallumon, ha minden $a \in I$ esetén az $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ meredekségfüggvény monoton növő az $I \setminus \{a\}$ halmazon. A bizonyítást kihagytam. Végül alkalmazásképpen igazoltuk, hogy az x^n függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on minden n pozitív egész esetén.