Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2016. ősz

11. előadás (december 6.)

Az előző órai fő tétel (monoton és korlátos sorozat konvergenciája) egy alkalmazásaként az $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$sorozatot vizsgáltuk. Beláttuk teljes indukcióval, hogy (a_n) szigorúan monoton növő és felülről korlátos (például 100 egy felső korlátja). Ebből következően konvergens és a rekurzióban elvégezve a határátmenetet megkaptuk, hogy a limesz $\sqrt{2}$.

Ezután a Bolzano–Weierstrass-tétel kérdéskör következett. Először beláttuk, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata, a bizonyítás a csúcs segítségével történt. Az a_n csúcs a sorozatban, ha minden $m > n$ esetén $a_m < a_n$. Ha végtelen sok csúcs van, akkor azok szigorúan csökkenő sorozatot alkotnak, véges sok csúcs esetén pedig nem nehéz monoton növekedő sorozatot találni. A tétel következménye, hogy minden sorozatnak van határértékkel rendelkező részsorozata. Ennek fontos következménye a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel, mely szerint minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

A sorozatok témakörének lezárásaként a Cauchy-kritériumra tértünk rá. Definiáltuk a Cauchy-sorozat fogalmát: (a_n) Cauchy-sorozat ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található N küszöb, hogy minden $n, m > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Beláttuk, hogy ha (a_n) Cauchy, akkor korlátos. Végül kimondtuk a Cauchy-kritériumot, amely szerint (a_n) pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat. A bizonyítást – idő hiányában – kihagytuk.Ezután belekezdtünk a függvények témakörbe. A függvény, leképezés zés, hozzárendelés szavak szinonímák. Egy $f\colon A \to B$ függvény kapcsán megbeszéltük az értelmezési tartomány, értékkészlet fogalmakat és jelöléseiket. Ezt követően az injektív, szürjektív és bijektív tulajdonságokat definiáltuk és néztünk példát is (az $f\colon A \to B, f(x) = x^2$ függvény különböző A, B valós számhalmazokkal).

Ezután rátértünk a függvények közötti műveletekre: összeg, különbség, szorzat, hányados és kompozíció. Definiáltuk az értelmezési tartományokat (például $D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$) és a hozzárendelési szabályt ($(f/g)(x) := f(x)/g(x)$). Egy példával ($f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$) illusztráltam, hogy a kompozíció művelete nem kommutatív.

Végül bevezettem a grafikon fogalmát: graph f az $(a, f(a))$ $(a \in A)$ rendezett párok halmaza, amely részhalmaza az $A \times B$ Descartes-szorzatnak.

Az óra utolsó részében valós függvények különböző tulajdonságait ismételtük át. Valós függvénynek azon $f\colon A \to B$ függvényeket neveztem, amelyekre $A, B \subset \mathbb{R}$. Az alábbi definíciók szerepeltek: páros, páratlan, periodikus függvény (itt példaképpen szóban beláttuk, hogy a Dirichlet-függvénynek minden nemnulla racionális szám periódusa). Ezután következett az adott halmazon alulról és felülről korlátosság, korlátosság, (szigorú) monoton növekedés és csökkenés definíciója. Következő órán a konvexitással foglalkozunk részletesen.