Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2016. ősz

10. előadás (november 29.)

A múlt órához kapcsolódóan még egy állítást fogalmaztam meg és bizonyítottam be: ha (a_n) konvergens és $b_n \to \infty$, akkor $a_n/b_n \to 0$. Végül ismét felhívtam a figyelmet a kritikus limeszekre.

Ezt követően a nagységrendek témakörét tárgyaltuk. Motivációként felírtam az n^k (k pozitív egész), a^n ($a > 1$), $n!$ és n^n sorozatokat, és azt a kérdést tettem fel, hogy melyik tart gyorsabban a végtelenhez. Az n^k típusú sorozat növekedését polinomiálisnak, az a^n ($a > 1$) növekedését exponenciálisnak hívtam korábban. A nagyságrendek meghatározásához két segédállítást láttunk be. Ha az (a_n) sorozathoz található olyan $q < 1$ szám, hogy egy indextől kezdve $|a_{n+1}/a_n| < q$, akkor $a_n \to 0$. Láttuk, hogy $q = 1$ esetén nem igaz az állítás, ellenpélda az $a_n = 1 + 1/n$ sorozat, amely bár szigorúan monoton csökkenő, de nem nullsorozat. Ha $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, akkor egy indextől kezdve, $|a_{n+1}/a_n| < q < 1$, így teljesül az előbbi állítás feltétele. Ez utóbbi limeszt számoltuk ki a konkrét n^k/a^n, $a^n/n!$ sorozatok esetén, és igazoltuk ezzel, hogy 0-hoz tartanak, vagyis n^k-nál gyorsabban tart vgételenhez a^n ($a > 1$), és ez utóbbinál gyorsabban tart végtelenhez $n!$. Bevezettem az $a_n \prec b_n$ jelölést a (b_n) gyorsabban tart végtelenhez, mint (a_n) tulajdonságra, amelyet az $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ sorozatokra úgy definiáltam, hogy $a_n/b_n \to 0$. Röviden tehát: $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$ (kérdés: van-e olyan (b_n) sorozat, amelyre $n^n \prec b_n$?). az aszimptotikus egyenlőség fogalmát értelmeztem: $a_n \sim b_n$, ha $a_n/b_n \to 1$. Például $2^n + n^2 \sim 2^n$, hiszen $(2^n + n^2)/2^n \to 1$ a nagyságrendek miatt.

Az előadás következő témája a monotonitás és határérték kapcsolata volt. Először emlékeztettem, hogy egy sorozat monoton növekedése és csökkenése, valamint szigorú monotonitása mit jelent. Ezután beláttuk, hogy minden monoton sorozatnak van véges vagy végtelen határértéke, pontosabban ha (a_n) monoton növő és felülről korlátos, akkor $\lim a_n = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$; ha (a_n) monoton növekedő és felülről nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$; ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor $\lim a_n = \inf\{a_n\}$; végül ha (a_n) monoton csökkenő és alulról nem korlátos, akkor $\lim a_n = -\infty$.

Alkalmazásként az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot vizsgáltuk. A számtani és mértani közepek segítségével beláttuk, hogy monoton növekedő. Hasonlóan látható, hogy a $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton csökkenő, mivel $a_n < b_n$, ezért a_n felülről korlátos, b_n alulról korlátos, tehát mindkettő konvergens. Sőt, a határértékük megegyezik, hiszen $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$. A közös határérték a nevezetes $e \approx 2,71$ szám, amely a későbbi félévekben még sokszor elő fog kerülni.