

Bevezető analízis 2. vizsgatematika

Osztatlan matematikatanár szak, 2016. ősz

Tudnivalók a vizsgáról. A vizsgákra a Neptunban kell jelentkezni, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsga előtti napon emailben küldök vizsgabeosztást. Kényelmes ruhában gyertek, nem kell kiöltözni. Konzultáció a vizsgák előtti (munka)napokon délután lehetséges, de két nappal a vizsga előtt kérem, hogy jelezzétek emailben az igényt. Emellett emailben szívesen válaszolok kérdésekre, tessék nyugodtan írni bármilyen probléma esetén.

A vizsgán ezen a tematikán kívül semmilyen segédeszköz nem használható, üres lap viszont legyen mindenkinél. A vizsga megkezdésekor mindenki egy feladatot és két tételt húz (amelyek a tételsor három különböző részét fedik le), majd 1 óra felkészülési időt kap. Az elégséges jegy feltétele a **feladat megoldása** (esetleg kis segítséggel), a **definíciók és tételek pontos kimondása és értése** (ezt egyszerű kérdésekkel konkrét példákon könnyű tesztelni), a **bizonyítások alapgondolatának ismerete**, továbbá a **húzottaktól eltérő tételekből szűrőpróbaszerűen feltett kérdésekre való helyes válaszadás** (e kérdések is definíciók, tételek, ellenpéldák ismeretét és értését ellenőrzik). A gyakorlatokon megszerzett tudást és a logikus gondolkodás képességét a vizsgán se felejtjük el!

Vizsgakérdések.

1. Logikai alapfogalmak, logikai műveletek, kvantorok. Indirekt bizonyítás, $\sqrt{2}$ irracionálitása. Teljes indukció. Bernoulli-egyenlőtlenség.
2. Számítási, mértani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség. Halmazok egyenlősége, részhalmazok, üreshalmaz. Műveletek halmazokkal, azonosságok. Függvények. Értelmezési tartomány, értékészlet. Sorozatok (n tagú és végtelen).
3. A valós számok axiómarendszere: konstruktív és axiomatikus megalapozás. A testaxiómák és következményeik.
4. A rendezési axiómák és következményeik. Intervallumok, pozitív, negatív számok. Abszolútérték, tulajdonságok. Háromszög-egyenlőtlenség. Pozitív egészek, egészek, racionális, irracionális számok.
5. Az arkhimédészi axióma. Bármely két különböző valós szám között van racionális szám.
6. Egymásba skatulyázott zárt intervallumok. Cantor-axióma. Négyzetgyök létezése.
7. Tizedes törtek. Véges tizedes tört. Végtelen tizedes tört alak. Minden $x \geq 0$ számnak van végtelen tizedes tört alakja. Minden végtelen tizedes törthöz létezik pontosan egy olyan $x \geq 0$ szám, amelynek ez a tizedes tört alakja.
8. Halmazok maximuma, minimuma, példák. Felső és alsó korlát, felülről és alulról korlátos halmazok, példák. A teljességi tétel. Halmazok szuprimuma, infimuma, példák.
9. A hatványozás definíciója és tulajdonságai.
10. Konvergens sorozatok, ekvivalens definíciók, példák. A határérték egyértelműsége.
11. Végtelenhez és mínusz végtelenhez tartó sorozatok, ekvivalens definíciók. Oszcillálva divergens sorozatok. Példák.
12. Határérték és korlátosság. Konkrét sorozatok határértéke: n^p , a^n , $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$. Részsorozatok. Átrendezés.
13. Határérték és algebrai műveletek: összeg-, szorzat- és hányadossorozat limesze. Kritikus határértékek.
14. Határérték és rendezés. Rendőrelv. Példák.

15. Elégséges feltételek $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ teljesüléséhez. Az n^k/a^n , $a^n/n!$ sorozatok határértéke. Nagyságrendek. Aszimptotikus egyenlőség, példa.
16. Határérték és monotonitás. Monoton sorozat limesze. Az $(1 + 1/n)^n$ sorozat és az e szám. Példa rekurzív sorozat határértékének kiszámítására.
17. Monoton részsorozat létezése. Bolzano–Weierstrass-tétel. Cauchy-sorozat. Cauchy-kritérium.
18. Függvényekhez kapcsolódó fogalmak: értelmezési tartomány, értékészlet, injektív, szürjektív, bijektív, grafikon, példák. Valós függvények globális tulajdonságai: páros, páratlan, periodikus, korlátos, monoton, példák.
19. Konvex, konkáv függvények: definíció, példák. Jensen-egyenlőtlenség, alkalmazás. A konvexitás egy ekvivalens jellemzése, alkalmazás.