Bevezető analízis 2014. tavasz, pótzh

Minden megoldást **indokolni** kell! A dolgozat értéke osztályzatban 1-gyel kevesebb a hibátlanul megoldott feladatok számánál. A gyakorlaton vagy előadáson bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Előadáson bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!**

1. Legyen H nemüres, valós számhalmaz. Írjuk fel kvantorok segítségével a következő állításokat:

(a) A H halmaznak nincs legnagyobb eleme.

(b) A H halmaz korlátos.

2. Van-e olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre minden $n > N$ esetén teljesül, hogy

(a) $n^7 + 2n^5 - 100 > n^3$?

(b) $n^7 + 2n^5 - 100 < n^3$?

3. Legyen $a_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}$. Igaz-e, hogy az (a_n) sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja?

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) =?$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt{n + \dfrac{1}{2n}} =?$

6. Van-e olyan (a_n) és (b_n) sorozat, amelyre teljesül, hogy $a_n \to \infty, b_n \to 0$, és

(a) $\dfrac{a_n}{b_n}$ oszcillálva divergens?

(b) $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$?

7. Legyen $(\forall n \in \mathbb{N}^+)\quad a_n = 1$, továbbá $b_1 = 2$ és $b_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(b_n + \dfrac{1}{b_n}\right)$. Igazoljuk, hogy $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott intervallumsorozat! Határozzuk meg a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ metszetet!