Bevezető analízis 2014. tavasz, 2. zh

Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható. Ha egy megoldásban súlyos hiba van, a megoldásra akkor is nulla pontot adunk, ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. A gyakorlaton vagy előadáson bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Előadáson bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!**

1. Legyen $H = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+ \right\}$. Határozzuk meg a H halmaz szuprémumát! Van-e legnagyobb eleme H-nak?

2. Legyen H nemüres valós számhalmaz és $c \in \mathbb{R}$. Mi a logikai kapcsolat az alábbi állítások között, azaz melyikből következik a másik?

A: $\sup H < c$

B: Minden $x \in H$ esetén $x < c$.

3. Legyen $a_n = \frac{3n^2+2}{n+1}$. Sejtsük meg a sorozat határértékét, és a határérték definíciója alapján (azaz küszöbszám megadásával) bizonyítsuk a sejtést!

4. Legyen $a_n = \sqrt[n]{5^n - n \cdot 2^n}$. Számítsuk ki (a határértékkel kapcsolatban tanult összefüggések felhasználásával) az (a_n) sorozat határértékét!

5. Mi a határértéke az $n^{3/2} \cdot \left(\sqrt{n^4 - 4} - n^2 \right)$ sorozatnak, ha $n \to \infty$?

6. Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) valós számsorozatok, hogy

(a) (a_n) divergens, (b_n) divergens és $a_n + b_n$ konvergens?

(b) (a_n) konvergens, (b_n) divergens és $a_n + b_n$ konvergens?

7. Mi a határértéke az $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ sorozatnak, ha $n \to \infty$?