Bevezető analízis 2014. tavasz, 1. zh

Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható. Ha egy megoldásban súlyos hiba van, a megoldásra akkor is nulla pontot adunk, ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. A gyakorlaton vagy előadáson bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Előadáson bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!**

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, akkor $a_1 \le \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \le a_n$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $(\forall n \in \mathbb{N}^+)\ \sqrt[n]{2} - 1 \le \dfrac{1}{n}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N}^+)\ \sqrt{n+23} - \sqrt{n+17} < \varepsilon$.

4. Van-e olyan $n_0 \in \mathbb{N}^+$, amelyre minden $n > n_0$ esetén teljesül, hogy

(a) $n^5 + 200n^3 - 50 > n^2$?

(b) $n^5 + 200n^3 - 50 < n^2$?

5. Bizonyítsuk be, hogy $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ |a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|$.

6. Legyen $H \subset (0, \infty)$, $H \ne \emptyset$ és $a, b \in \mathbb{R}$. Melyik állításból következik a másik?

P: H-nak nincs minimuma.

Q: $(\forall a > 0)\ (\exists b \in H)\ b < a$

7. Legyen $a_1 = 2$, és tudjuk, hogy $(\forall n \in \mathbb{N}^+)\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1{,}1$. Bizonyítsuk be, hogy $(\exists n \in \mathbb{N}^+)\ a_n > 10^6$.