Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható. Ha egy megoldásban súlyos hiba van, a megoldásra akkor is nulla pontot adunk, ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson kimondott tételek és a gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Tétel volt előadáson, hogy..." vagy „Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy..."), kivéve, ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem** ! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos** !

1. Bizonyítsuk be, hogy $x > 0$ esetén $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

2. Határozzuk meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + e^{\sin x}}{\log x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0} x \log^2 x$

3. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt{1-x}$ függvény 0 körüli másodfokú Taylor-polinomját! Adjunk felső becslést a másodfokú Taylor-polinom hibájának abszolút értékére, ha $|x| < 0{,}1$.

4. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{1+4x^2} + \frac{1}{1+4x^2}\right) dx$

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+4x}} + \frac{\sqrt{1+4x}}{4}\right) dx$

5. Oldjuk meg az $y' + \dfrac{y}{x} = 3x - 5x^2$ differenciálegyenletet!

6. Adjuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény $F = \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ felosztáshoz tartozó alsó és felső összegét a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ intervallumon!

7. Vannak-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, amelyekre igaz, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 2$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$?