Bevezető analízis 2 gyakorlat

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

Besenyei Ádám csoportjának emlékeztetői. A többi csoportban a feladatok, házik sorrendje eltérhet!

1. hét/1. gyakorlat (február 9.)

- bemutatkozás, tudnivalók stb.
- 1/1–5, 7, 8, 9: „ha…, akkor…” típusú kijelentések igazságtartalma, tagadása; monoton, páros, páratlan függvények definíciója.
- 1/77, 78: racionális és irracionális számok; direkt és indirekt bizonyítás.
- 1/54, 55, 56: melyikről tudjuk eldönteni, hogy igaz/hamis?
- HF: 1/6 (periodikus függvény), 10–11 (logika), 79 (hol a hiba?), 57–62 (melyik A_n igaz/hamis?).

1. hét/2. gyakorlat (február 11.)

- HF megbeszélés:
  - 1/6: periodikus függvény, táblánál A.J.
  - 1/10: logika, ellenpélda.
  - 1/11: indirekt biz., $(\neg A \implies \neg B) = (A \implies B)$.
  - 1/79: hol a hiba: nem stimmel az indirekt feltevés, „nem az 1 a legnagyobb szám” még jó, de ez nem jelenti azt, hogy $A \neq 1$ a legnagyobb, hanem az is előfordulhat, hogy nincs legnagyobb),
  - 1/57–62: melyik A_n igaz/hamis?
- 1/14 a,c,e: nyitott mondat kvantorokkal, értelmes mondatban megfogalmazni, melyikből melyik következik? (a kvantorokat zárójelezhetjük az áttekinthetőség, könnyebb olvashatóság érdekében, de nem kötelező).
- 1/63: teljes indukció (vigyázat: ha az indukciós lépésben a bizonyítandóból indulunk ki, és az indukciós feltevés alkalmazása, majd átalakítás után igaz összefüggéshez jutunk, akkor azt is meg kell gondolni és le is kell írni(!), hogy a következtetések visszafelé is érvényesek-e).
- 1/112: Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazása.
- 1/65: összeg megsejtése (kiszámolás $n = 1, 2, 3$ esetén).
- HF: 1/14 befejezni, 15, 16 (kvantorok), 65 indukcióval (és hogyan lehet anélkül?), 66 (indukció), 70 (hol a hiba?), 113 (Bernoulli).

2. hét/1. gyakorlat (február 16.)

- HF megbeszélés:
  - 1/15, 16: kvantorok, táblánál: I.B.
  - 1/65: indukció, táblánál: F.A., utána: másképp hogyan lehet?, vigyázat: attól, hogy valami „sok” n esetén igaz, még nem biztos, hogy minden n-re, pl. n^2+n+41 prím $n=0,1,\dots,39$ esetén, de $40^2+40+41=41^2$.
  - 1/66: indukció, táblánál: T.K., aztán a bizonyítás letisztázása (fontos az érthető leírás!).
  - 1/70: hol a hiba?: legutolsó sor, attól, hogy az $1,\dots,n$ lovak, valamint $2,\dots,n+1$ lovak ugyanolyan színűek, még nem biztos, hogy mind azonos színű, mert $n=2$ esetén a két csoportnak nincs közös eleme,
  - 1/113: Bernoulli, először a kézenfekvő irány, ez nem működik, utána reciprok, ez már jó.
- 1/72: indukció változata: A_1 és A_2 igaz, és $A_{n-1} \wedge A_n \implies A_{n+1}$, akkor $\forall n$-re A_n igaz.
- 1/98: számtani és mértani közép egyenlőtlensége, és az egyenlőség esete.
- HF: 1/99, 100, 101 (számtani és mértani közép), 1/69 (hol a hiba?), $u_n > \frac{1}{3} \cdot 1,6^n$.

2. hét/2. gyakorlat (február 18.)

- HF megbeszélés:
  - 1/99: számtani és mértani közép alkalmazása trükkösen ($a/3, a/3, a/3, b/2, b/2, c$, táblánál: T.A., zsákutcák megbeszélése is).
  - 1/100: számtani és mértani közép egyszerű alkalmazása.
  - 1/101: ez is $A \geq G$ és semmi trükk (L.D. jól megoldotta).
  - $u_n > 1,6^n/3$: indukció változata, A_1 és A_2 igaz, és $A_{n-1} \wedge A_n \implies A_{n+1}$, akkor $\forall n$-re A_n igaz (táblánál: N.ZS.).
  - 1/69: hol a hiba?: a $\dots$ mit is rejt, az $1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)$ összeghez 1-et adva az összeg $1+2+3+\dots+(n-2)+n$, kimarad az $(n-1)$ (G.K. elmondta).
- önálló munka: 1/68 (indukcióval és anélkül is), 71, 115 (Bernoullival és közepekkel is).
- 1/68: indukció megbeszélése (fontos: mindig írjuk le, mit tudunk, mit KELL, és mit ELÉG bizonyítani; egymás utáni egyenletek összekötő szöveg nélkül más számára nem követhetők; úgy írjuk le a megoldást, hogy más is megértse, ne csak, aki leírta).
- HF: 1/68 (indukció nélkül), 71 (Fibonacci), 115 (Bernoulli és közepek), 127, 129 (közepek), 23, 28, 29 (halmazok), 114 (szorgalmi).

3. hét/1. gyakorlat (február 23.)

- HF megbeszélés:
  - 1/71: szomszédos Fibonacci-tagok relatív prímek: indirekt és inukció (táblánál: T.ZS.), vagy fordított sorrendben is lehet fogalmazni.
  - 1/115: n-edik hatványra Bernoulli, vagy mértani közép trükkösen a $2, 1, \ldots, 1$ számokra (ötletet adta: N.G.).
  - 1/23 a,b,c,d: metszet és unió definíciója és ellenpéldák (elmondta CS.T.)
  - 1/28, 29: írjunk fel halmazokat metszet, unió segítségével (elmondta: F.J.).
- 1/80: mit lehet mondani a_n-ről? $a_n \geq 1$; szigorúan monoton nő $\not\Rightarrow a_n > 100$, ellenpélda: $1 - 1/n$; nem érdemes kiszámolni sok értéket, mert nagyon lassan nő. Ötlet: indirekt, $a_n \leq 100$ minden n-re, utána ebből alsó becslés, $a_2 \geq 1+1/100$, $a_3 \geq 1+2/100$, stb. $a_n \geq (n-1)/100$, de elég nagy $n = 10^4$-re ez nagyobb 100-nál, ami ellentmondás. Vigyázat, ebből nem jött ki, hogy $a_{10^4} > 100$, mert ezt egy indirekt feltevésből vezettük le, amely helytelennek bizonyult. Célszerű módosítani az indirekt feltevést: $a_{10^4} \leq 100$, ekkor hasonlóan végigvihető a bizonyítás (a monotonitás alapján ismét $a_n \leq 100$ minden $n \leq 10^4$ esetén) és kijön az indirekt feltevés hamissága.
- HF: 1/52, 118, 73; 4/11 (szorgalmi: van-e olyan n, hogy $\sqrt[n]{n} < 1.01$?, hogyan „osszuk szét” a gyök alatt n-et, hogy mértani közepet kapjunk?).

3. hét/2. gyakorlat (február 25.)

- HF megbeszélés:
  - 1/52: ha a bizonyítandóból indulunk ki és megfelelő átalakítások után igaz összefüggéshez jutunk, akkor fontos megvizsgálni és leírni, hogy végig ekvivalens átalakításokat végeztünk (táblánál K.K.).
  - 1/118: első megoldás D.N., írjuk fel néhány n-re és sejtsük meg a sorozat általános képletét, majd lássuk be indukcióval, utána a szigorú monotonitás nem nehéz; második megoldás B.A., a szigorú monotonitás ekvivalens azzal, hogy $a_n < 2$ minden n-re, ezt pedig indukcióval igazolhatjuk; harmadik megoldás: indukció, K.K. megoldotta.
  - (szorgalmi 1/117: D.N. gondolkodott rajta, de finomítani kell a becslést, mert nem jön ki az $n = n \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1$ trükkel).
- 1/105, 107: egyenlőtlenség, küszöb; 3 alapszabály: nem egyenlőtlenséget oldunk meg; ha valamilyen n-re igaz, attól még nem biztos, hogy nagyobb n-ekre is igaz; nem kell a legkisebb olyan N-et megtalálni, ahonnantól kezdve igaz, bármilyen nagy N megfelel.
- önálló munka: 1/106, 108 (ne oldjuk meg, gyöktelenítsünk, aztán becsüljünk, és utána már megoldhatjuk), 1/119 (0.001 helyett ε-nal az előző, de ettől ne ijedjünk meg, gondoljunk arra, hogy ε egy szám csak az ellenség eltitkolta előlünk), 1/123 (K van benne, de ettől se ijedjünk meg, az egy szám, amit az ellenség titokban tart).
- HF: 1/109, 110, 111 (van-e 100-nál nagyobb tag?), 120, 121 (adott ε-hoz küszöb), 124, 125 (adott K-hoz küszöb).

4. hét/1. gyakorlat (március 2.)

- HF megbeszélés:
  - 1/110: egyszerű felső becslés, számláló legfeljebb $n\sqrt{n}$, táblánál F.A.
  - 1/111: felső becslés, számláló $\leq$ nevező, táblánál G.M.
  - 1/109: finomított alsó becslés ($n/2$-ig 0-val becsülünk alulról, utána $\sqrt{n/2}$-vel).
  - 1/120: gyöktelenítés, mint órán, táblánál A.J.
  - 1/121: Bernoulli, táblánál L.D. (megcsinálta I.B. is), másképp számtani és mértani középpel.
  - 1/124–125: ötlet: $K \leq |K|n^k$, és innen ugyanúgy megy, mint amikor K konkrét szám (táblánál másképp T.K., megcsinálta F.A. is)
- 1/149: az a) részben kétféle ötlet: esetszétválasztás (4 eset, HF végiggondolni), vagy négyzetreemelés (most ekvivalens, ezt megcsinltuk); b) rész ismét mehet esetekkel, négyzetreemeléseel (de vigyázat, nem ekvivalens), és elegánsan visszavezetéssel (ezt megnéztük); c) rész ismét visszavezetéssel az előbbire és az a, b szerepcserével kapott egyenlőségre.
- HF: 1/155a (kvantor, halmaz), 156a,b (halmazsorozat metszete).

4. hét/2. gyakorlat (március 4.)

- HF megbeszélés:
  - 155a: halmaz + kvantor (bizonyítani, vagy ellenpélda, léteziknél mindig adjunk egy példát!)
  - 156a: intervallumsorozat metszete (először megsejtjük a metszetet, aztán két dolgot kell igazolni: a megsejtett halmaz minden eleme mindegyik I_n-ben benne van; minden egyéb valós számhoz található olyan I_n, amelyben az a szám nincs benne).
- önáló munka: 155 b,c,d, 156 b,c,d,e,f,g.
- HF: az önálló munka feladataiból, ami maradt.

5. hét/1. gyakorlat (március 4.)

- HF megbeszélés:
  - 154 b: táblánál: N.N.
  - 154 c: táblánál: ZS.G.
  - 154 d: táblánál: K.K.
  - 156 b: táblánál: F.A.
  - 156 c: táblánál: W.J.
- 171 a,b: van-e maximuma, minimuma? (használjuk: $x-1 < x$ és $x-1 \in H$; bármely két különböző valós szám között van racionális).
- önálló munka: 171 c,d, 172–175. és 171-ben $\leq$ helyett is $<$ legyen.
- HF: az órán meg nem beszélt feladatok.

5. hét/2. gyakorlat (március 11.)

- HF megbeszélés:
  - 175 d: van-e max/min? táblánál N.G.
  - 180: mi a kapcsolat? táblánál T.A.
- 176 a: $\sqrt[n]{2} > \sqrt[n+1]{2}$ (emeljük $n(n+1)$-edik hatványra), tehát a legnagyobb elem 2, és nincs minimum.
- 177 a, d: kvantorokkal: alulról korlátos, alulrú nem korlátos, van minimuma, nincs minimuma.
- önálló munka: 176 (célszerű monotonitást vizsgálni), 177.
- HF: zh-ra készülni, mintazh.

6. hét/1. gyakorlat (március 16.)

- ZH

6. hét/2. gyakorlat (március 18.)

- ZH megbeszélés
- sup/inf emlékeztető
- 176/a: $\sup H = 2$, mert a 2 felső korlát és bármely 2-nél kisebb valós szám nem felső korlát, hiszen a 2 nagyobb annál és benne van a halmazban; $\inf H = 1$, mert minden elem 1-nél nagyobb, és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n, hogy $\sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon$.
- HF: 176 b, c, d, 186–189.

7. hét/1. gyakorlat (március 23.)

- HF megbeszélés:
  - 176/b: $\inf H = \sqrt{2} - 1$ (minimum, mert $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ szigorúan monoton növő és ha van minimum, akkor az infimum is), $\sup H = 0$ (becslés $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/(2\sqrt{n})$ és ez ε-nál kisebb, ha $n > 1/(4\varepsilon^2)$), táblánál K. K.
  - 176/c: $\inf H = 0$, mert $n = 1$ esetén ezt kapjuk, egyébként pedig $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} > 0$. Másrészt $\sup H = 1/2$. Ehhez alsó és felső becslés: $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{2}$.
- önálló munka: 176 d, 186–189.
- 188: $\inf \mathbb{Q} = -\infty$, tehát alulról nem korlátos. Indoklás: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az Arkhimédészi axióma miatt van olyan n pozitív egész, hogy $n > -x$, és ekkor $-n < x$. Vagy: $(x-1, x)$ intervallumban van racionális szám. Vigyázat, általában $x - 1$ választás nem jó, mert $x - 1$ nem feltétlenül racionális. Szuprémum hasonlóan, $\mathbb{Q}$ felülről nem korlátos.
- 189: $\sup H = 2$, mert ez maximum. $\inf H = 0$, mert alsó korlát, és minden $\varepsilon > 0$ esetén, ha $n > 2/\varepsilon$ és $k > 2/\varepsilon$, akkor $1/n + 1/k < \varepsilon$, tehát ε nem alsó korlátja H-nak.
- HF: 190, 195, 196.

7. hét/2. gyakorlat (március 25.)

- HF megbeszélés:
  - 190: c nem következik, mert például $H = (0, 1)$ és $c = 1,5$ esetén c-nél kisebb felső korlát nincs, de $\sup H = 2$.
  - 196: $\sup H = 2$, mert maximum; $\inf H = 0$, mert alsó korlát, és semmilyen pozitív szám nem alsó korlát (Arkhimédészi axióma miatt).
- $a_n \to A$, $a_n \to +\infty$, $a_n \to -\infty$ kétféle definícióinak megbeszélése;
- 2/8 a: attól, hogy végtelen sok tag van εnál kisebb távolságr, még nem biztos, hogy nagyobb távolságra csak véges sok, például $a_n = (-1)^n$ és $b = 1$ választással igaz az a), de $a_n \not\to 1$. Az a) csak szükséges feltétele a b-hez való konvergenciának.
- 2/8 b: ez a b-hez való konvergencia ekvivalens definíciója.
- 2/8 c: ismét a $(-1)^n$ jó ellenpélda akármilyen ε-nal.
- 2/8 d: a konvergencia definíciójának tagadása.
- önálló munka: 2/9–13 (9,10,11 megvolt mindenkinél; 11-ben új kérdés: van olyan N, hogy $n > N$ esetén (a_n) monoton nő).
- HF: az önáló munkából megmaradt feladatok és 2/1, 2, 14, 15, 22, 23, 23, 24.

8. hét/1. gyakorlat (március 30.)

- HF megbeszélés:
  - 2/9: ez maga az $a_n \to \infty$ második definíciója.
  - 2/10: nem következik, például $a_n = (-1)^n$ (páros indexű tagok n, páratlan indexű tagok $-n$, nem tart végtelenhez, mert a második definíció nem teljesül semmilyen K esetén).
  - 2/11: $P \not\Longrightarrow Q$, például $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $Q \not\Longrightarrow P$, például cseréljük fel egy szigorúan monoton növő, végtelenhez tartó sorozat első két tagját. Az sem következik, hogy egy indextől kezdve monoton növő, mert a cserélgetést tegyük meg az összes a_{2k+1}, a_{2k} tagokkal $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots)$.
  - 2/12: $a_n = 3 \to 3$, $a_n = n \to \infty$, $-\infty$-hez nem tarthat, mert $K = 3$ esetén a második definíció nem teljesül.
  - 2/13: előzőhöz hasonló, nem tarthat ∞-hez, de $a_n = 2 \to 2$, $a_n = -n \to -\infty$.
  - 2/14: $a_n = (-1)^n$ korlátos, $a_n = (-2)^n$ nem korlátos (biz. kell).
  - 2/15: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \to 0$. (Extra kérdés: lehet-e a határérték nem 0?).
  - 2/22 a: divergens: minden A-hoz $\varepsilon = 1/2$ jó, mert ekkor az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumba nem eshet egyszerre a 3 és a 4 is (mert az intervallumban bármely két szám távolsága kisebb 1-nél), így tetszőleges N esetén van olyan $n > N$, hogy $a_n \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ (n legyen páros vagy páratlan, annak megfelelően, hogy éppen a 3 vagy a 4 nincs ebben az intervallumban). Nem lehet $\pm\infty$ határértéke sem, mert a második definíció nem teljesül $K = 2$ (a $-\infty$ esetben), $K = 5$ (a $+\infty$ esetben) választással.
- 2/16: adott K-hoz kell N, hogy minden $n > N$ esetén $n - \sqrt{n} > K$. Ilyet már csináltunk: $K + \sqrt{n} \le (|K| + 1)\sqrt{n}$, így elég $(|K| + 1)\sqrt{n} < n$, azaz $N = (|K| + 1)^2$ jó köszöb. Lehet másképp: $n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) > \sqrt{n}$, ha $n > 4$, így $N = \max(4, K^2)$ jó küszöb.
- 2/38: sejtsük meg a limeszt: $\frac{5n-1}{7n+2} = \frac{5-\frac{1}{n}}{7+\frac{2}{n}} \to \frac{5}{7}$ (ez még csak mese, mert hiányzik a limesz és algebrai műveletek kapcsolata). Adott $\varepsilon > 0$ számhoz kell N, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - 7| < \varepsilon$. Konkrétan: $\left|\frac{17}{7(7n+2)}\right| < \varepsilon$, ahonnan egy N már könnyen adódik, például $N = (\frac{17}{7\varepsilon} - 2)/7$ jó küszöb.
- HF: 2/17–19, 2/35–42, 2/31.

8. hét/2. gyakorlat (április 8.)

- HF megbeszélés:
  - 2/19: táblánál T. Zs., alsó becslés például $n > 10$ esetén a nevezőben $10n + 100n$-et írunk, innen már nem nehéz K-nál nagyobbá tenni a kifejezést nagy n-ekre. (Lehet sokféleképpen becsülni.)
  - 2/40: ezt már sokszor csináltuk (0-hoz tart, gyöktelenítés, és felső becslés), táblánál N. Zs.
  - 2/39: sejtés: a limesz 1, biz. definíció szerint egyszerűen megy, táblánál I. B.
  - 2/31 a: $a_n = -1/n$ sorozatnak nincs legnagyobb tagja (mert szigorúan monoton nő), de (a_n) nem tart a végtelenhez. Ha (a_n) végtelenhez tart, akkor nincs legnagyobb tagja, mert például ha lenne a_k, akkor az (a_k, ∞) félegyenesen nem lenne tagja, ellentmondva a def2-nek.
  - 2/31 b: $a_n = 1$-nek van legkisebb tagja, de nem tart végtelenhez. Fordítva igaz, mert az (a_1, ∞) intervallumon kívül csak véges sok tagja van, ezek között van legkisebb (ha esetleg nem lenne tag a félegyenesen kívül, akkor a_1 a legkisebb).
  - 2/31 c: ha végtelenhez tart, akkor $K = 3$ választással kapjuk def2-ből. Fordítva nem igaz, például $a_n = 4$ konstans sorozat.

- 2/31 d: ez maga def2.
- 2/31 e: ha végtelenhez tart, akkor def2 miatt a $(3, \infty)$-en kívül csak véges sok tag van, így a félegyenesen végtelen sok. Fordítva nem igaz, például $a_n = 4$.
- 2/31 f: a végtelenhez tartásból következik, de fordítva nem, például $a_n = (-2)^n$.

- önáló munka: 2/20, 21, 107–112.
- 2/20: $n!/2^n = (n/2) \cdot ((n-1)/2) \cdot \ldots \cdot 3/2 \cdot 2/2 \cdot 1/2 \geq n/4$ (belül minden törtet 1-gyel becsülünk alulról.)
- 2/21: $2^n > n^2$, ha $n > 4$, teljes indukcióval. Innen már könnyű a befejezés. (Mi a helyzet $2^n/n^3$ esetén? És $2^n/n^{100}$ esetén?)
- (a_{2n}) és (a_{2n+1}) konvergens, mi a kapcsolat (a_n) konvergenciájával? Ha konvergens, akkor minden részsorozata is az és ugyanaz a limesze. Fordítva nem, $a_n = (-1)^n$ divergens, de a két részsorozat konvergens.
- HF: 2/107–122, 2/3 (nehéz, nem elvárás), 2/47–50.

9. hét/1. gyakorlat (április 13.)

- HF megbeszélés:
  - 2/109: konvergens részsorozatok például (a_{2n}), (a_{2n+1}), (a_{4n}), (a_{4n+1}). Nem konvergens például (a_{3n}).
  - 2/118: bármely részsorozat konvergens és 0-hoz tart, mert (a_n) maga konvergens és 0-hoz tart (tétel volt előadáson, hogy konvergens sorozat bármely részsorozata konvergens).
  - 2/111: nincs konvergens részsorozata, mert $a_n \to \infty$, és ekkor minden részsorozatra is igaz ez (def2-ből könnyű igazolni).
  - 2/112: minden részsorozat 0-hoz tart, mert (a_n) maga is 0-hoz tart.
  - 2/107: P $\Longrightarrow$ Q a tétel miatt. Fordítva is következik. Tekintsük ugyanis az $(b_n) = (a_{6n})$ és $(c_n) = (a_{6n+3})$ részsorozatokat. Mivel b_n részsorozata (a_{2n})-nek és (a_{3n})-nek, ezért a limeszük megegyezik. Hasonlóan, (c_n), (a_{2n+1}), (a_{3n}) limesze megegyezik, vagyis szükségképpen (a_{2n}) és (a_{2n+1}) limesze egyenlő. Ebből a def2 segítségével könnyű látni, hogy ekkor az (a_n) sorozatnak is van limesze, mégpedig ez a közös érték.
  - 2/47: ha (a_n) és (b_n) konvergens, akkor az összegük is, ez tétel. Fordítva nem igaz, például $a_n = n$ és $b_n = -n$.
  - 2/48: ha (a_n) és (b_n) limesze végtelen, akkor az összegüké is, ez tétel. Fordítva nem igaz, például $a_n = n$ és $b_n = 0$.
  - 2/49: az $a_n = n$, $b_n = -n$ sorozatokra Q igaz, de P nem. Az $a_n = (1, 0, 3, 0, 5, \dots)$ és $b_n = (0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots)$ sorozatokra P igaz, de Q nem.
  - 2/50: az $a_n = n$, $b_n = 1/n$ sorozatokra Q igaz, de P nem. Az $a_n = (1, 0, 3, 0, 5, \dots)$ és $b_n = (0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots)$ sorozatokra P igaz, de Q nem.
- 2/51: $a_n = n$, $b_n = -n$ nem korlátosak, de az összegük igen. Ha (a_n) korlátos, akkor van olyan A_1, A_2, hogy minden n-re $A_1 \le a_n \le A_2$. Hasonlóan, (b_n) korlátossága miatt van olyan B_1, B_2, hogy minden n-re $B_1 \le b_n \le B_2$. Következésképpen minden n-re $A_1 + B_1 \le a_n + b_n \le A_2 + B_2$, tehát az összegsorozat is korlátos.
- 2/52: $a_n = n$, $b_n = 1/n$ közül az egyik nem korlátos, de az összegük igen. Ha mindkettő korlátos, akkor a szorzatuk is. Vigyázat, az előbbi bizonyításnál az egyenlőtlenségeket összeadhattuk, de összeszorozni nem szabad (csak körültekintően)! Nem igaz az, hogy ha A_2 felső korlátja (a_n)-nek és B_2 felső korlátja (b_n)-nek, akkor A_2B_2 felső korlátja lenne (a_nb_n)-nek, például $a_n = b_n = -1$ és $A_2 = B_2 = 0$. Ezért célszerű a korlátosságot átfogalmazni: (a_n) korlátos, ha van olyan A, hogy minden n-re $|a_n| \le A$ (gondoljuk meg, hogy ez miért ekvivalens az eredeti definícióval). Az ilyen típusú egyenlőtlenségek összeszorozhatók, mert azonos előjelű mindkét oldala. Tehát, ha $|a_n| \le A$ és $|b_n| \le B$, akkor $|a_nb_n| \le AB$.
- önálló munka: 2/53–57.
- HF: ami maradt az önálló munkából.

9. hét/2. gyakorlat (április 15.)

- HF megbeszélés:
  - 2/55: táblánál G. M., ha $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n$, akkor $a_n/b_n \to 1$; ha $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$, akkor $a_n/b_n \to \infty$; ha $a_n = 1/n$, $b_n = -1/n^2$, akkor $a_n/b_n \to -\infty$; ha $a_n = (-1)^n/n$, $b_n = 1/n$, akkor (a_n/b_n) oszcillálva divergens.
  - 2/56: előadáson volt, hogy ha $b_n \to \infty$, akkor $1/b_n \to 0$. Volt az is, hogy fordítva nem igaz, például $1/b_n = -1/n$ esetén $b_n \to -\infty$, sőt $1/b_n = 1/n(-1)^n$ esetén (b_n) oszcillálva divergens. Annyi biztos, hogy ha $1/b_n \to 0$, akkor (b_n) nem lehet konvergens, mert akkor $1 = b_n \cdot 1/b_n$ is az lenne, és 0 lenne a határértéke, ami lehetetlen.

- 2/57: egyikből sem következik a másik. Például $a_n = n+1$ és $b_n = n$ esetén $a_n/b_n \to 0$ és $a_n - b_n = 1$. Másrészt, $a_n = 1/n$ és $b_n = 1/n^2$ esetén $a_n - b_n \to 0$ és $a_n/b_n = n \to \infty$. Érdemes tehát megjegyezni, hogy az aszimptotikus egyenlőség a különbségsorozatra nem mond semmit sem, nemkorlátos is lehet.

- önálló munka: 2/60, 61, 73–78.

- 2/60: nem igaz, például $a_n = 0$ és $b_n = (-1)^n$ esetén $(a_n b_n)$ konvergens.

- 2/61: nem igaz, például $a_n = 0$ és $b_n = (-1)^n$ esetén (a_n/b_n) konvergens.

- 2/73: $3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \to 3$, tehát rendőrelv alapján a sorozat határértéke 3. Mi az $\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ sorozat limesze?

- 2/74: $1 \leftarrow \sqrt[n]{6} \leq \sqrt[n]{7 + (-1)^n} \leq \sqrt[n]{8} \to 1$, tehát rendőrelv alapján a sorozat határértéke 1.

- 2/75: $\sqrt[n]{2^n - n} = \sqrt[n]{2^n}\sqrt[n]{1 - \frac{n}{2^n}} \leq 2$. Másrészt, $n \prec 2^n$, ezért $n/2^n \to 0$, így van olyan N,hogy minden $n > N$ esetén $n/2^n < 1/2$ (def1-ben $\varepsilon = 1/2$-et választunk, de valójában $\frac{1}{2}$ helyett bármilyen 0 és 1 közötti szám megteszi). Ekkor $n > N$ esetén $\sqrt[n]{1 - \frac{n}{2^n}} \geq \sqrt[n]{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$. A rendőrelv alapján tehát a sorozat limesze 2. Hasonlóan megy a többi részfeladat, valójában n hatványának nem volt szerepe, lehetett volna akár $\sqrt[n]{2^n - n^{10}}$. A nagyságrendek nélkül az $n/2^n \leq 1/2$ egyenlőtlenséget teljes indukcióval is beláthatjuk, mert már $n = 2$-től igaz. Az n^{100} esetben ez már nem működne, mert a kezdőlépést nehezen tudjuk megadni (lehetne még binomiális tétellel is). Igaz az is, hogy ha $a_n > 0$ és határértéke pozitív szám, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ (valójában ezt igazoltuk a konkrét esetekben, általában a_n-et $a-\varepsilon$ és $a+\varepsilon$ közé tudjuk beszorítani egy küszöbtől, és alkalmazhatjuk a rendőrelvet), de ezt még ne használjuk, majd következő órán beszélünk erről.

- HF: 2/46, 62–66, 73–78 (amit órán nem beszéltünk meg).

10. hét/1. gyakorlat (április 20.)

- HF megbeszélés:
  - 2/78: táblánál G. M. (külön számláló, nevező n-edik gyökének limesze, elég nagy n-re a nagyságrendek alapján becsülhetünk, aztán rendőrelv, végül a limesz 2/3.
  - 2/62: $a_n = n$, $b_n = n+1$-re igaz P, de Q nem. A másik irány tétel volt előadáson, de most beláttuk újra. A konvergencia definíciója alapján $\varepsilon = (B-A)/2$ választással (ahol $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$) elég nagy n-re $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, $b_n \in B-\varepsilon, B+\varepsilon)$, és így $a_n < (A+B)/2 < b_n$.
  - 2/64: (a_n)-re nem következik semmiféle határérték létezése, például legyen $a_n = (-1)^n$, $b_n = -2$.
  - 2/65: (a_n)-re nem következik semmiféle határérték létezése, például legyen $a_n = (-1)^n$, $b_n = -n$.
  - 2/66: (a_n)-re nem következik semmiféle határérték létezése, például legyen $a_n = (-1)^n$, $b_n = -2$, $c_n = 2$. A rendőrelvhez kellene még $\lim b_n = \lim c_n$ is.
  - 2/46: $a_n = (-1)^n$, $a = 1$ esetén $a_n^2 \to a$, de (a_n) oszcillálva divergens. Köbre igaz, de nem árultam el a bizonyítást, gondolkodni való feladat.
- önálló munka: 2/69–72, 2/124–135.
- 2/69: a: $a_n = 2^n$ (és szorozhatjuk konstanssal, vagy hozzáadhatunk 2^n-nél kisebb nagyságrendű tagokat); b: $a_n = 1/2^n$; c: $a_n = 0$; d: $d_n = n^n$.
- 2/70: ha $\sqrt[n]{a_n} \to 2$, akkor elég nagy n-re $3/2 < \sqrt[n]{a_n}$, így $a_n > (3/2)^n \to \infty$, ezért a rendőrelv miatt $a_n \to \infty$.
- 2/71: ha $\sqrt[n]{a_n} \to 1/2$, akkor elég nagy n-re $0 \le \sqrt[n]{a_n} < 3/4$, így $0 \le a_n < (3/4)^n \to 0$, ezért a rendőrelv miatt $a_n \to 0$.
- 2/124: $n^7 \prec 2^n + n^2$ bizonyítása: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{2^n+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^7}{2^n}}{1+\frac{n^2}{2^n}} = \frac{0}{1+0} = 0$.
- HF: amit nem beszéltünk meg.

10. hét/2. gyakorlat (április 22.)

- HF megbeszélés: amit a hallgatók kértek
  - 2/131: $\frac{n+2}{\sqrt{n}-3^{-n}}$ limesze. Először nézzük meg történik, ha a számláló legnagyobb nagyságrendű tagjával osztjuk a számlálót és nevezőt: $\frac{n+2}{\sqrt{n}-3^{-n}} = \frac{1+\frac{2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}-3^{-n}/n}$, ahol a számláló 1-hez tart, a nevező pedig 0-hoz, és sajnos az 1/0 kritikus limesz. Célszerű ezért nevező legnagyobb nagyságrendű tagjával osztani a számlálót és nevezőt: $\frac{n+2}{\sqrt{n}-3^{-n}} = \frac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}{1-3^{-n}/\sqrt{n}} \to \frac{\infty}{1} = \infty$.
- önálló munka: 2/92–103.
- 2/92: két monoton növő (csökkenő) sorozat összege monoton növő (csökkenő), hiszen ha $a_{n+1} \ge a_n$ és $b_{n+1} \ge b_n$, akkor $a_{n+1} + b_{n+1} \ge a_n + b_n$. Egy monoton növő és egy csökkenő összege lehet bármilyen monotonitás szempontjából: $a_n = 2n$ és $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = n$ növő; $a_n = n$ és $b_n = -2n$ esetén $a_n + b_n = -n$ csökkenő; $a_n = 2n + (-1)^n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = (-1)^n$ se nem növő, se nem csökkenő (semmilyen küszöbtől kezdve sem).
- 2/93: monotonitás volt korábban. Lehet így: $a_{n+1} \ge a_n$ a rekurzió alapján azzal ekvivalens, hogy $a_n \le 2$, ezt pedig indukcióval könnyen láthatjuk. Ezzel a felülről korlátosság is megvan, így (a_n) konvergens, határértéke a rekurzióban elvégzett határátmenet után adódik: $\lim a_n = 2$ (-2-t az

előjel miatt kizárhatjuk). Egy másik út: $a_{n+1} \geq a_n$ indukcióval és a rekurzió felhasználásával (2-vel szorzás és gyökvonás). Felső korlátot ezután úgy találhatunk, hogy elfogadjuk a létezését (munkahipotézis), ekkor (a_n) konvergens, és a limeszét az előbbi módon meghatározuk. Mivel monoton növő konvergens sorozat limesze felső korlátja a sorozatnak, így nyertünk egy felső korlát jelöltet. Erről belátjuk, hogy valóban felső korlát, és ezzel a munkahipotézis is igazolva van.

- 2/94: indukcióval könnyű látni, hogy $0 < a_n < 1$ minden n-re. Innen a monotonitás is világos, és az ezek alapján létező limeszt is könnyen számolhatjuk, ami 0.
- 2/95: ismét indukcióval könnyű látni, hogy $0 < a_n < 1$ minden n-re. Innen a monotonitás is világos, és az ezek alapján létező limeszt is könnyen számolhatjuk, ami 0 (az 1 is adódna, de azt kizárhatjuk, hiszen $a_n \leq 1/2$).
- 2/97: az $a_n = 1 - 1/n$ sorozat szigorúan monoton növő, de limesze 1. Az $1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \dots$ sorozat limesze végtelen, de semmilyen indextől kezdve nem monoton.
- 2/98: vegyük az előző feladat ellenpéldáinak (-1)-szeresét.
- HF: ami kimaradt

11. hét/1. gyakorlat (április 27.)

- HF megbeszélés:
  - 2/98: $a_n \le 1$, ha $n \ge 2$, ez egyszerű átrendzéssel és téljes négyzetté alakítással kijön. Ennek és a rekurziónak a segítségével $n \ge 2$ esetén a monoton növekedés is könnyen kijön. Ebből következően van limesze, amelyet a rekurzióban való határátmenettel kapunk, ez 1 (a többi gyök nem jöhet szóba).
  - 2/99: az első néhány tag kiszámítása után látszik, hogy $a_{2k+1} = 1,5$ és $a_{2k} = -0,5$. Ez a sorozat oszcillálva divergens, mert ha lenne határértéke, akkor bármely részsorozatának is lenne és megegyezne az eredeti sorozat limeszével, de (a_n)-nek van két, különböző limesszel rendelkező részsorozata.
  - 2/100, 101, 103: előadáson volt
  - 2/102: összetettebb feladat, néhány tag kiszámítása utána az a sejtés, hogy (a_{2k+1}) monoton növő, (a_{2k}) monoton csökkenő, és minden k-ra $a_{2k+1} \le a_{2k}$. Ezek indukcióval láthatók. Ebből következően mindkét részsorozat felülről korlátos is, így konvergensek. A rekurzióbeli határátmenetből egyetlen limesz adódik mindkét részsorozatra, mégpedig $(1 + \sqrt{17})/4$ (a másik gyök negatív), így szükségképpen (a_n) konvergens.
- 2/104: reciprokot véve, aztán $(n+2)$-edik gyököt vonva, majd számtani és mértani közép egyenlőtlensége az n tényezőre kiegészítve egy 1-gyel.
- 2/106: a kifejezés nem más, mint $(1 + 1/2n)^{2n}$ négyzetgyök. Ez utóbbi sorozat részsorozata az $(1 + 1/n)^n$ sorozatnak, így konvergens és limesze e.
- 3/1: mértani sorozat összege, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.
- 3/2: volt korábban, teleszkopikus összeg ($\frac{k(k+1)}{=} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, így minden kiesik, kivéve az első 1 és az utolsó $-1/(n+1)$, tehát az összeg $1 - 1/(n+1)$), vagy néhány tag kiszámítása után az összeg megsejtése és indukióval való igazolása.
- HF: 2/105, 3/2

11. hét/2. gyakorlat (április 29.)

- HF megbeszélés:
  - 2/105: táblánál T. A., sejtés: monoton növő, ezt felírva, majd $(n+2)$-edik gyököt vonva a gyök alatti n darab tényezőt egy 1-essel kiegészítve a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségéből adódik. Felső korlát például az 1. A konvergenciához vegyük a reciprokát, amely $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \to e$, így az eredeti sorozat $1/e$-hez tart.
  - 3/1: előadáson volt, mértani sor $q = 1/10$, így a sor konvergens ás összege 10/9.
  - 3/2: láttuk $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$, tehát a sor konvergens és összege 1.
  - 3/3: teleszkopikus összeg, $s_n = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3k+1}) \to \frac{1}{3}$.
- önálló munka: 3/4–17.
- 3/4,5,6: mértani sor, de vigyázzunk a kezdőértékre: $q^k + q^{k+1} + \cdots = q^k(1+q+q^2+\dots) = q^k/(1-q)$ (feltéve, hogy konvergens), vagy $1/(1-q) - 1 - q - \cdots - q^k$ (ami ugyanannyi).
- 3/7: a triviális kritérium nem teljesül, mert $a_n \to \infty$. Összege viszont van, ∞, mert nemegatív tagú sornak van összege.
- 3/8: előadás, lehet mértani sorral, vagy részletösszeggel.

- 3/9: előadás (triviális kritérium = szükséges feltétel sor konvergenciájához).
- 3/10: egyszerű logika, ha konvergens lenne, akkor $a_n \to 0$ a triviális kritérium miatt.
- 3/11: nem, például $\sum(-1)^n$.
- 3/12: ha s_n a harmonikus sor n-edik részletösszege, akkor ennek a sornak az n-edik részletösszege $s_{n+1} - 1$, de ez végtelenhez tart, mert s_n is. Úgy is okoskodhatunk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, és ez utóbbi sor divergens (előadáson mondtam, hogy véges sok tag elhagyása a sor konvergenciáján nem változtat, hiszen ezáltal mindegyik részletösszeget ugyanazzal a véges sok értékkel csökkenjük, ami a részletösszeg-sorozat konvergenciáján nem változtat, de a határértékén, és így a sor összegén természetesen igen).
- HF: amit nem beszéltünk meg.

12. hét/1. gyakorlat (május 4.)

- HF megbeszélés:
  - 3/13: előadás, hiperharmonikus sor, $\alpha = 2 > 1$, tehát konvergens.
  - 3/14: előadás, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, ekkor $\sum \frac{2}{n^2}$ is és az összeg $2\sum \frac{1}{n^2}$.
  - 3/15: ha konvergens volna, akkor $\sum 3 \cdot \frac{1}{3n} = \sum \frac{1}{n}$ is, de ez divergens (harmonikus sor).
  - 3/16: hiperharmonikus sor, $\alpha = 1/2<1$, tehát divergens.
  - 3/17: $1/\sqrt[n]{n} \to 1$, így nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele.
- önáló munka 3/25–51 (az elméleti feladatokat egyelőre kihagyhatjuk).
- 3/25: $1/(n+4) \geq 1/(2n)$, ha $n \geq 4$, továbbá $\sum \frac{1}{2n}$ divergens, ezért a minoráns kritérium alapján $\sum \frac{1}{n+4}$ is divergens.
- 3/26: mértani sor, $q = 1/2 < 1$, tehát konvergens.
- 3/27: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$, ha $n > N$, ugyanis $\frac{n^2}{n!} \to 0$ az $n^2 \prec n!$ nagyságrend miatt, így van olyan N, hogy minden $n > N$ esetén $\frac{n^2}{n!} < 1$ ($\varepsilon = 1$ választás def1-ben)., és ekkor $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$. Mivel $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n}^2$ konvergens, ezért a majoráns kritériumból következően $\sum_{n=N+1} \frac{1}{n!}$ is, de ekkor $\sum_{n=1} \frac{1}{n!}$ is konvergens.
- 3/28: előzőhöz hasonló gondolatmenettel, elég nagy n-től kezdve $\frac{n^2}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$, és aztán majoráns kritérium.
- 3/30: előzőhöz hasonlóan konvergens (kérdés: mennyi az összege?)
- 3/31: mivel $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} \to \frac{3}{2}$, ezért elég nagy n-től kezdve $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} > \frac{7}{6}$, és ekkor a rendőrelv alapján $(\frac{3}{2} - \frac{1}{n})^n \geq (\frac{7}{6})^n \to \infty$., vagyis nem teljesül a triviális kritérium.
- 3/33: nem teljesül a triviális kritérium, mert $\frac{2n^3}{n^2+3} \to \infty$ (számlálót, nevezőt osztjuk n^2-tel).
- 3/34: $\frac{\sqrt[3]{3n^9}}{\sqrt{n^4+3}} \geq \sqrt[3]{3}\frac{n^3}{3n^4} = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}\frac{1}{n}$, és $\sum \frac{1}{n}$ divergens, így minoráns kritérium alapján a becsült sor is divergens.
- HF: ami kimaradt.

12. hét/1. gyakorlat (május 6.)

- 3/35: $\frac{4}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{4}{n^2}$ és utána majoráns kritérium.
- 3/37: nem teljesül a triviális kritérium (tehát a sor divergens), mert $a_{2n} \to 1$ és $a_{2n+1} \to -1$.
- 3/38: konvergens, ugyanúgy, mint 3/30 (vagy hányados-, gyökkritérium).
- 3/39: a triviális kritérium nem teljesül (hasonlóan, mint 3/35-ben).
- 3/40: konvergens, hasolnó elven megy, mint 3/31 (vagy hányados-, gyökkritérium): $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^n \leq (\frac{1}{2})^n$, és aztán majoráns kritérium.
- 3/41: mértani sor, melynek hányadosa $-2/3$, amely 1-nél kisebb abszolútértékű, tehát a sor konvergens.
- 3/45: ugyanaz, mint 3/30.
- 3/46: a (-1) valójában $2n$-ediken van, ezért ez a harmonikus sor, amely divergens.
- 3/47: mértani sor, amelynek hányadosa 1-nél nagyobb abszolútértékű, tehát a sor divergens.

- 3/48: konvergens, hasonló elvvel, mint 3/40: ha n elég nagy, akkor $(\frac{n+200}{2n+7})^n \leq (\frac{2}{3})^n$ és aztán majoráns kritérium.
- 3/49: a triviális kritérium nem teljesül (számlálót és nevezetőt is n^3-bel osztva láthatjuk,hogy $a_n \to \infty$), a sor divergens.
- 3/50: a részletösszeg egy teleszkopikus összeg, így $s_n = \sqrt{n+1} - 1$, ennek határértéke ∞, tehát a sor divergens-

13. hét/1. gyakorlat (május 11.)

- ZH: É. 0.81-es terem 12-től.

13. hét/2. gyakorlat (május 13.)

- ZH osztás és gyakjegyek.