Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

9. előadás (április 14.)

Az előadás elején röviden emlékeztettem arra, hogy hol tartunk: határérték és műveletek témaköre, eddig szerepelt a limesz és összeadás kapcsolata. Hátravan a limesz és szorzás műveletének kapcsolata. Rögtön ki is mondtam azt a tételt, hogy mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ határértékről, amennyiben $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$: a választ egy táblázatban foglaltuk össze. Bizonyításképpen megnéztük az $A = B = \infty$, valamint az $A > 0$ és $B = \infty$ eseteket; a többit házi feladatnak adtam fel (de vizsga előtti konzultáción mindent meg lehet kérdezni). A kritikus határértékekre is néztünk példát, méghozzá láttuk, hogy $A = 0$, $B = \infty$ esetén a szorzatsorozat viselkedése mind a négyféle kategóriába eshet: $a_n = 1/n$, $b_n = n$ esetén $a_n b_n = 1$, tehát konvergens; $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n = n$, tehát $a_n b_n \to \infty$; $a_n = -1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n \to -\infty$; $a_n = (-1)^n/b$, $b_n = n$ esetén $(a_n b_n)$ oszcillálva divergens. Azt is megjegyeztem, hogy a limesz és műveletek kapcsolata csak véges sok tag, vagy tényező esetén érvényes. Például az n tagú $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ összeg minden tagja 0-hoz tart, de az összeg minden n-re 1. Hasonlóan, az $(1 + \frac{1}{n})^n$ szorzat mind az n tényezője 1-hez tart, de a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$, tehát ha egyáltalán van limesze, akkor az mindenképpen legalább 2.

Végül a limesz és műveletek témakörben beláttuk, hogy ha $a_n \to A \in \mathbb{R}$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n/b_n \to 0$. Itt megjegyeztem, hogy ha $b_n \to 0$, akkor $(1/b_n)$ kritikus limesz: $b_n = 1/n$ esetén $1/b_n = n \to \infty$, $b_n = -1/n$ esetén $1/b_n = -n \to -\infty$ és $b_n = (-1)^n/n$ esetén $1/b_n = (-1)^n$ oszcillálva divergens.

Ezután következett a határérték és rendezés témaköre. Kimondtam a fő tételünket, a rendőrelvet, amelyet három részre bontottam: 1. ha $a_n \leq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$; 2. ha $a_n \geq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to -\infty$, akkor $b_n \to -\infty$; 3. ha $\lim a_n = \lim c_n$ (véges vagy végtelen) és egy küszöbtől kezdődően $a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$. Példaként meghatároztuk az $\sqrt[n]{10 + (-1)^n}$ és $\sqrt[n]{2^n + n}$ sorozatok limeszét. Ebben a témakörben még két állítást mondtam ki és láttam be. Ha $a_n \leq b_n$ és konvergensek, akkor $\lim a_n \leq \lim b_n$, amit indirekt igazoltunk. Itt megjegyeztem, hogy ha $a_n < b_n$, akkor is csak $\lim a_n \leq \lim b_n$-re következtethetünk, hiszen például $a_n = 0$ és $b_n = 1/n$ esetén a két sorozat limesze megegyzik. Az állítás következménye, hogy ha $\lim a_n < \lim b_n$, akkor egy indextől kezdve $a_n < b_n$.

Ezt követően a nagységrendek témakörét tárgyaltuk. Motivációként felírtam az n^k (k pozitív egész), a^n ($a > 1$), $n!$ és n^n sorozatokat, és azt a kérdést tettem fel, hogy melyik tart gyorsabban a végtelenhez. Az n^k típusú sorozat növekedését polinomiálisnak, az a^n ($a > 1$) növekedését exponenciálisnak hívtam. A nagyságrendek meghatározásához két segédállítást láttunk be. Ha az (a_n) sorozathoz található olyan $q < 1$ szám, hogy egy indextől kezdve $|a_{n+1}/a_n| < q$, akkor $a_n \to 0$. Láttuk, hogy $q = 1$ esetén nem igaz az állítás, ellenpélda az $a_n = 1 + 1/n$ sorozat, amely bár szigorúan monoton csökkenő, de nem nullsorozat. Ha $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, akkor egy indextől kezdve, $|a_{n+1}/a_n| < q < 1$, így teljesül az előbbi állítás feltétele. Ez utóbbi limeszt számoltuk ki a konkrét n^k/a^n, $a^n/n!$ sorozatok esetén, és igazoltuk ezzel, hogy 0-hoz tartanak, vagyis n^k-nál gyorsabban tart vgételenhez a^n ($a > 1$), és ez utóbbinál gyorsabban tart végtelenhez $n!$. Mivel $n!/n^n \leq 1/n$, így $n!$-nál gyorsabban tart végtelenhez n^n. Bevezettem az $a_n \prec b_n$ jelölést a (b_n) gyorsabban tart végtelenhez, mint (a_n) tulajdonságra, amelyet az $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ sorozatokra úgy definiáltam, hogy $a_n/b_n \to 0$. Röviden tehát: $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$ (kérdés: van-e olyan (b_n) sorozat, amelyre $n^n \prec b_n$?). Az óra végén az aszimptotikus egyenlőség fogalmát értelmeztem: $a_n \sim b_n$, ha $a_n/b_n \to 1$. Például $2^n - n^2 \sim 2^n$, hiszen $(2^n - n^2)/2^n \to 1$ a nagyságrendek miatt.