Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

8. előadás (március 31.)

Az órát az (a^n) sorozattal kezdtük. Felidéztem, hogy múlt órán beláttuk az $a^n \to \infty$ konvergenciát az $a > 1$ esetben. Most megnéztük a többi esetet. Igazoltuk (visszavezetéssel), hogy $|a| < 1$ esetén $a^n \to 0$, illete $a \leq -1$ esetén (a^n) oszcillálva divergens (mert sem alulról, sem felülről nem korlátos). Ezután kimondtam, hogy $a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$, ezt az előző típusú határértékre vezettük vissza n-edikre emeléssel. Végül az $\sqrt[n]{n} \to 1$ határértéket igazoltuk, ugyancsak n-edikre emeléssel, és a páros, páratlan esetek szétválasztásával, majd Bernoulli-egyenlőtlenséggel

A következő témakör a sorzatok átrendezése volt. A (b_n) sorozat az (a_n) egy átrendezése, ha van olyan $\pi\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ bijekció (permutáció), hogy $a_n = b_{\pi(n)}$. Például az $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ sorozat egy átrendezése a $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots$ sorozat, ahol most $\pi(2k) = 2k-1$ és $\pi(2k-1) = 2k$, hiszen $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_4$, $b_4 = a_3, \ldots$. A határérték második definíciója alapján azonnal adódik, hogy az átrendezés nem változtatja meg egy sorozat besorolását a határérték szempontjából. Az átrendezás után a részsorozat következett. Ha $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ pozitív egészek sorozata, akkor a $b_k = a_{n_k}$ sorozat az (a_n) sorozat egy részsorozata. A definíció alapján ismét könnyű látni, hogy ha (a_n)-nek a határértéke a (amely lehet véges vagy végtelen, akkor minden részsorozatának is ez a határértéke. Végül megjegyeztük, hogy véges sok tag elhagyása vagy hozzávétele ugyancsak nem befolyásolja a sorozat besorolását. Végtelen sok tag elhagyása, elvétele már befolyásolhatja, például a $(-1)^n$ sorozatból elhagyva a páros indexűeket, egy konvergens sorozatot kapunk; visszafele pedig egy konvergensből egy oszcillálva divergenst.

Rátértünk ezt követően a limesz és műveletek kapcsolatára. Beláttuk, hogy ha $a_n \to a$, $b_n \to b$, akkor $a_n + b_n \to a + b$, $a_n b_n \to ab$, valamint $b \neq 0$ esetén $a_n/b_n \to a/b$. A bizonyításokban legtöbbször a háromszög-egyenlőtlenséget és konvergens sorozatok korlátosságát használjuk, illetve azt, hogy $|a_n - a|$ és $|b_n - b|$ pici, ha n elég nagy (az, hogy milyen picivé kell tenni, abból adódik, hogy a becslés végén ε-t szeretnénk kapni). Megnéztük ezután az összeg határértékének többi eseteit: $a = \infty$, $b = \infty$, amikor $a_n + b_n \to \infty$; $a = -\infty$, $b = -\infty$, amikor $a_n + b_n \to -\infty$; valamint $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, amikor $a_n + b_n \to \infty$. Mindezt egy táblázatban is összefoglaltuk, ahol kérdőjeleket is hagytunk, amelyek a kritkus határértékeket jelentik, konkrétan, amikor a és b közül az egyik ∞, a másik $-\infty$. Ebben az esetben $a_n + b_n$ viselkedése a konkrét sorozatoktól függ, mind a négy kategóriába eső példát lehet adni, és adtunk is: $a_n = n$, $b_n = -n$ esetén $a - n + b_n = 0 \to 0$; $a_n = 2n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = n \to \infty$; $a_n = n$, $b_n = -2n$ esetén $a_n + b_n = -n \to -\infty$; $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = (-1)^n$.