Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

7. előadás (március 24.)

Az előadást az $a_n = (-1)^n$ sorozat divergenciájával kezdtük. Megfogalmaztuk, mit jelent az, hogy egy a szám nem határértéke (a_n)-nek, majd az $a = 0,2$ esetben be is láttuk a konvergencia küszöbindexes definíciójának nem teljesülését (az általános a esetét házi feladatnak adtam, érdemes mindkét definícióval meggondolni). Ezután bevezettem a konvergens és divergens sorozat elnevezéseket: konvergens egy sorozat, ha van olyan a valós szám, amely határértéke; divergens, ha nem konvergens, vagyis nincs olyan a valós szám, amely határértéke lenne. Ezután a szokásos indirekt bizonyítással a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával igazoltuk, hogy a határérték egyértelmű.

Ezt követően a végtelenhez tartó sorozatok témakörével kezdtünk foglalkozni. Két definíciót mondtam: elsőként a küszöbindexeset. Az (a_n) sorozat végtelenhez tart, ha minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan N küszöbindex (vagy küszöbszám), hogy minden $n > N$ esetén $a_n > K$. A másik definíció: minden K valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(K, +\infty)$ félegyensen kívül. Beláttuk a két definíció ekvivalenciáját, majd bevezettem a szokásos $a_n \to \infty$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelöléseket. Példaként megnéztük az $a_n = n$ és $a_n = \sqrt{n}$ sorozatok végtelenhez tartását az első definíció szerint. Az utóbbi sorozatot egy „fáradékony bolhával" szemléltettem. A bolha n-edik lépése $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ekkor a lépések hossza 0-hoz tart, de a bolha akármilyen messze eljut. Megemlítetem, hogy hasonló eset fordul elő, ha $1/n$ hosszú a bolha n-edik lépése, de $1/n^2$ esetén már csak véges távolságra jut el. Mindezt látni fogjuk a félév végén a sorok témakörénél.

Következett ezután a $-\infty$-hez tartás két definíciója. Az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden K valós számhoz található olyan N küszöbindex (vagy küszöbszám), hogy minden $n > N$ esetén $a_n < K$. Ezzel ekvivalens (az ekvivalenciát házi feladatnak adtam), hogy minden K valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(-\infty, K)$ félegyenesen kívül. Bevezettem az oszcillálva divergens sorozat elnevezést az olyan sorozatokra, amelyeknek se véges, se $\pm\infty$ határértéke nincs. Tisztáztuk, hogy ha (a_n) divergens, akkor lehet $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$ és (a_n) oszcillálva divergens is. Ha pedig azt mondjuk, hogy (a_n)-nek van határértéke, akkor az jelentheti, hogy konvergens, $a_n \to \infty$ vagy $a_n \to -\infty$.

Ezután a határérték és korlátoság témakörének tárgyalása következett. Beláttuk, hogy ha (a_n) konvergens, akkor korlátos (vagyis az $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz korlátos). Az $a_n = (-1)^n$ sorozat példája mutatja, hogy ez megfordítva nem igaz. Igazoltuk, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, de felülről nem korlátos. Kimondtam, hogy ha $a_n \to -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos, de alulról nem; a bizonyítást házi feladatnak adtam. A tételek alkalmazásával megmutattuk, hogy az $a_n = (-2)^n$ sorozat oszcillálva divergens, hiszen sem alukról, sem felülről nem korlátos (ezt csak szóban vázoltam).

Az óra utolsó részében néhány konkrét sorozat határértékét vizsgáltuk meg. Az (n^p) sorozat határértéke 1, ha $p = 0$; ∞, ha $p > 0$ és egész; továbbá 0, ha $p < 0$ és egész. Végül a Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével megmutattuk, hogy $a > 1$ esetén $a^n \to \infty$.