Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

6. előadás (március 17.)

Az előadás elején felidéztem a múlt óráról a hatványozással kapcsolatosan megbeszélteket. Először a^n-t értelmeztük, ha n pozitív egész és a valós, aztán a^0-t minden $a \neq 0$ esetén, utána $a^{-n} = 1/a^n$, ha n pozitív egész és $a > 0$, végül $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$-t, ahol p, q egészek, $q > 0$ és $a > 0$. A valós kitevő esetének ötletét is megbeszéltük a múlt órán, erre is emlékeztettem. Ehhez segédállításként beláttuk, hogy ha $a > 1$ valós és $r < s$ racionális számok, akkor $a^r < a^s$. Ebből következik, hogy ha $0 < a < 1$ valós és $r < s$ racionális, akkor $a^r > a^s$. Ezzel minden készen áll a valós kitevőjű hatvány értelmezéséhez. Tekintsük a következő halmazokat adott $x \in \mathbb{R}$ és $a > 1$ esetén:

$$A := \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \qquad B := \{a^s : x < s, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tételként kimondtam, hogy $\sup A = \inf B$. A bizonyításnak azt a részét megnéztük, hogy $\sup A \leq \inf B$. Indirekt módon valójában azt láttuk be, hogy ha minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $a \leq b$, akkor szükségképpen $\sup A \leq \inf B$. Ellenkező esetben ugyanis a szuprémum és infimum definíciói alapján könnyen találhatunk olyan $a \in A$ és $b \in B$ elemeket, amelyekre $a > b$. A bizonyítás második felét, nevezetesen az egyenlőség igazolását kihagytam, szóban vázoltam, hogy mit kellene megmutatni (minden $\varepsilon > 0$ esetén találni $a \in A$ és $b \in B$ elemeket, amelyre $|a - b| < \varepsilon$). A tétel után kézenfekvő módon adódik a^x definíciója, amely legyen $a^x := \sup A = \inf B$. Ha $0 < a < 1$, akkor legyen $a^x = (1/a)^{-x}$, végül pedig $1^x = 1$. Ezzel a^x-t minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmeztük. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált hatványfogalom rendelkezik a megszokott műveleti tulajdonságokkal, ezeket csak kimondtam.

Ezt követően rátértünk a sorozatok konvergenciájának témakörére. Először felidéztem a sorozat fogalmát (egy sorozat valójában függvény, de a fejünkben továbbra is $a_1, a_2, \ldots$). Sok példát mutattam sorozatok különböző megadására: explicit megadás ($a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n$), rekurzív (Fibonacci; $a_0 = 0, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$; $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}$) és egyéb definícióval adott (a_n az n-edik prímszám; a_n a $\sqrt{2}$ végtelen tizedestört alakjának n-edik tizedes jegye). Ezután az $a_n = 1/n$, $a_n = (-1)^n/n$ és $a_n = (-1)^n$ sorozatok kapcsán megfigyeltük a 0-hoz tartás és nemtartás jelenségét. A példák által motiválva megfogalmaztam a sorozat határértékének első (a küszöbindexes) definícióját: az (a_n) sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}^+ \; \forall n > N \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

Rögtön megjegyeztem, hogy a N küszöbindexnek nem kell egésznek lennie, ezért küszöbszámról is beszélhetünk. Ezután megfogalmaztam a határérték második definícióját: az (a_n) sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ véges sok kivétellel teljesül (más szóval az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül). Beláttuk, hogy a két definíció egymással ekvivalens. Ezt követően példákat néztünk határértékre és küszöbindexekre: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n/n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Végül kimondtam, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak nincs határértéke, de a bizonyítást már csak a következő előadáson nézzük meg.