Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

5. előadás (március 10.)

Az előadást a felső korlát értelmezésével kezdtük. Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $b \in \mathbb{R}$ szám felső korlátja, ha minden $a \in A$ esetén $a \leq b$. Egy halmazt felülről korlátosnak mondunk, ha van felső korlátja. Ezután példákat néztünk. Láttuk, hogy az (a, b) intervallumnak b egy felső korlátja, és minden $\tilde{b} \geq b$ szám is felső korlát. Hasonlóan, az $[a, b]$ halmaznak b felső korlátja, és minden $\tilde{b} \geq b$ szám is az. Ezenkívül megnéztük az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmazt, amelynek az 1 felső korlátja, és minden 1-nél nagyobb szám is. Az üreshalmaznak minden valós szám felső korlátja, hiszen minden $b \in \mathbb{R}$ és minden $a \in \emptyset$ esetén $a \leq b$. Végül megbeszéltük, hogy $\mathbb{R}$ felülről nem korlátos, mert minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + 1 > x$ és $x + 1 \in \mathbb{R}$, tehát semmilyen $x \in \mathbb{R}$ nem lehet felső korlátja. A példák mutatják, hogy egy alsó korlát lehet a szóban forgó halmaznak eleme, de az is előfordulhat, hogy nincs a halmazban.

Ezt követően bevezettük az alsó korlát és az alulról korátosság fogalmát, majd megnéztük az előbbi példákat. Az (a, b) és $[a, b]$ intervallumok mind alulról korlátosak, az a szám egy alsó korlát, és minden $\tilde{a} \leq a$ is az. Beláttuk, hogy az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmaznak a 0 alsó korlátja és nincs pozitív alsó korlátja, hiszen az Arkhimédészi axióma miatt minden $x > 0$ számhoz található olyan n pozitív egész, amelyre $1/n < x$, tehát a halmazban van x-nél kisebb elem. Végül megbeszéltük, hogy $\mathbb{R}$ alulról nem korlátos, hiszen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x - 1 < x$ és $x - 1 \in \mathbb{R}$.

Ezután kimondtam – a példák által jól illusztrált – teljességi tételt, amely szerint minden nemüres felülről korlátos A számhalmaznak van legkisebb felső korlátja. Intervallumfelezéssel bizonyítottunk, legyártottuk az $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott intervallumsorozatot a következő tulajdonságokkal: a_n nem felső korlátja A-nak, b_n felső korlátja A-nak, továbbá $b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$. A Cantor-axióma garantál egy elemet az intervallumok metszetében, és az Arkhimédészi axióma alapján nem nehéz meggondolni, hogy a metszet szükségképpen egyelemű. Végül indirekt módon beláttuk, hogy x felső korlát, továbbá x-nél nincs kisebb felső korlát (az ellentmondás az lett, hogy találtunk a metszetbenegy másik elemet is).

A teljességi tétel alapján definiáltuk nemüres felülről korlátos halmaz szuprémumát (felső határát), amelyet $\sup A$-val jelölünk. Kimondtam a teljességi tétel párját (amely hasonlóan igazolható): minden nemüres alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja. Ezt a halmaz infimumának nevezzük és $\inf A$-val jelöljük. Példaképpen megbeszéltük, hogy $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b) = a$, $\sup\{1, 1/2, 1/3, \dots\} = 1$, $\inf\{1, 1/2, 1/3, \dots\} = 0$. Ezt követően értelmeztem felülről nem korlátos halmazok szuprémumát, legyen $\sup A = \infty$, illetve alulről nem korlátos halmazok infimumát, legyen $\inf A = -\infty$. Végül egyetlen logikus definícióknét felírtam, hogy $\sup \emptyset = -\infty$ és $\inf \emptyset = \infty$. A téma lezárásaként a korlátos halmaz elnevezést vezettem be az alulról és felülről korlátos halmazokra.

Ezt követően rátértünk a hatványozás témakörére. Bevezettem az $a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ jelölést, ha a valós és n pozitív egész. Definíció szerint $a \neq 0$ esetén $a^0 = 1$, továbbá $a^{-n} = 1/a^n$. Kimondtam a hatványozás azonosságait, és pár szót ejtettem a bizonyításról. Ezután definiáltam a racionális kitevő esetét, ha p, q egészek, amelyekre $q > 0$ és $(p, q) = 1$, akkor $a > 0$ esetén legyen $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$. Kimondtam tételként (és csak szóban vázoltam a bizonyítást), hogy ha $p/q = r/s$, akkor $(\sqrt[q]{a})^p = (\sqrt[r]{s})^s$, így az összes racionális kitevőre (nem csak a redukált alakú törtekre) adódik a hatvány definíciója. Az előadás végén még elmondtam a valós kitevőjú hatvány értelmezésének ötletét ($r < \sqrt{2} < s$ és $a > 1$ esetén szeretnénk, hogy $a^r < a^{\sqrt{2}} < a^s$, így r-ekre szuprémumot veszünk, s-ekre infimumot; kiderül ez a két érték ugyanaz, legyen akkor ez $a^{\sqrt{2}}$).