Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

4. előadás (március 3.)

Az előadás elején megismételtem az egymásba skatulyázott intervallumok fogalmát ($I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, ahol végtelen sok intervallumról van szó, és a tartalmazások iránya is fontos!), és felírtam a Cantor-axiómát is (egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres). Lényeges, hogy zárt intervallumokról van szó, példaként (az Arkhimédészi axióma segítségével) beláttam, hogy a $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \emptyset$.

Kimondtam ezután, hogy minden $a > 0$ számhoz található olyan $b > 0$ szám, amelyre $b^2 = a$. A bizonyítás fő gondolata az intervallumfelezési eljárás („oroszlánfogás"). Konstruáltunk olyan $I_n = [a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumokat, amelyekre $a_n^2 \le a \le b_n^2$, továbbá $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$. Ekkor a Cantor-axióma miatt a metszetük nem üres, legyen egy eleme x. Nem nehéz megmutatni (becsléssel), hogy $|x^2 - a| \le c/n$, ami csak úgy lehetséges, hogy $x^2 = a$. Megbeszéltük azt is, hogy a b szám egyértelmű, hiszen, ha $0 < b_1 < b_2$, akkor $b_1^2 < b_2^2$, ami az axiómákból levezethető (HF). Szokásos jelölés: $b = \sqrt{a}$. Hasonlóan igazolható (de nem láttam be), hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $a > 0$ számokhoz egyértelműen létezik $b > 0$ szám, amelyre $b^n = a$. Ennek jelölése $\sqrt[n]{a}$.

Ezt követően rátértünk a tizedestörtekre. Megbeszéltük, hogy véges tizedestört alatt az

$$n, a_1 a_2 \dots a_k = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots \frac{a_k}{10^k}$$

alakú számokat értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Azt mondjuk, hogy az $x \ge 0$ szám végtelen tizedestört alakja $n, a_1 a_2 a_3 \dots$, ha $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (ahol $j = 1, 2, 3 \dots$), továbbá

$$\begin{aligned} n \le x &\le n + 1, \\ n, a_1 \le x &\le n, a_1 + \frac{1}{10}, \qquad\qquad \vdots \\ n, a_1 a_2 \dots a_k &\le n, a_1 a_2 \dots a_k + \frac{1}{10^k}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Három kérdést fogalmaztam meg: létezik-e minden nemnegatív valós számnak végtelen tizedestört alakja? Ha igen, akkor egyértelmű-e? Adott végtelen tizedestörthöz található-e olyan x valós szám, amelynek épen az a végtelen tizedestört alakja? Az egyértelműség kérdésére csak egy példát mutattam ($0,99 \dots = 1,00 \dots = 1$), illetve megemlítettem, hogy minden pozitív számnak egyértelmű a végtelen tizedestört alakja, kivéve a véges tizedestörteket, amelyeknek kétféle alakjuk van (az egyikben egy indextől kezdve minden jegy 0, a másikban 9). Konstruktív módon bebizonyítottam, hogy minden $x \ge 0$ számnak van végtelen tizedestört alakja. Ezután pedig a Cantor-axióma segítségével beláttuk, hogy minden végtelen tizedestört egyértelműen meghatároz egy valós számot, amelynek az a végtelen tizedestört alakja. Végül megemlítettem, hogy a végtelen tizedestörtek segítségével kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a valós számok és a számegyenes pontjai között (tehát a valós számok bármely két modellje „lényegében ugyanaz").

Rátértünk ezt követően a korlátos halmazok témakörére. Megbeszéltük valós számhalmazok maximumának és minimumának fogalmát, amelyekre a $\max A$ és $\min A$ jelöléseket fogjuk használni. Néztünk sok példát, megbeszéltük, hogy nemüres véges halmaznak van maximuma és minimuma (ez az elemszámra vonatkozó indukcióval igazolható). Volt példaként a $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmaz, és beláttuk, hogy nincs minimuma, mert $1/n > 1/(n+1)$.