Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

3. előadás (február 24.)

Az órán a valós számok axiómáit tárgyaltuk. A testaxiómák $\mathbb{R}$ algebrai tulajdonságait rögzítik. Adott két művelet, az összeadás és szorzás. Az összeadásra a következőket írjuk elő: kommutativitás, asszociativitás, nullelem létezése és ellentett elem létezése. A szorzás esetében ugyancsak megkívánjuk a kommutativitást, asszociativitást, ezenkívül a nullelemtől különböző egységelem létezését, illetve a nullelem kivételével a reciprok létezését. Az összeadást és szorzást a disztributivitás axiómája kapcsolja össze. Az olyan struktúrákat, amelyekben mindez a 9 axióma teljesül, testeknek szokás hívni. Megjegyeztem, hogy a $\{0, 1\}$ halmaz modulo 2 műveletekkel test, de például az egészek halmaza a szokásos műveletekkel nem test (például a 2-nek nincs reciproka).

Ezután megbeszéltük az axiómák néhány következményét, többek között azt, hogy az ellentett és a reciprok egyértelmű, amelyeket szokás szerint $-a$ és $\frac{1}{a}$ fogja jelölni. Ezenkívül beláttuk, hogy $a \cdot 0 = 0$ és $(-1) \cdot a = -a$ minden a-ra.

Ezt követően a rendezési axiómákra tértünk rá. Bevezettük az $a < b$ relációt, és erre előírtuk a trichotómiát, tranzitivitást, valamint összekapcsoltuk az összeadás és szorzás műveletével ($a < b \implies a + c < b + c$, illetve $(a < b) \wedge (0 < c) \implies ac < ac$). Ezzel az újabb 4 axiómával egy rendezett testet kapunk. A rendezés segítségével bevezethetjük a pozitív, negatív számok elnevezéseket. Használhatjuk továbbá az $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ jelöléseket is. Értelmezhetjük ezenkívül a nyílt, zárt, egyik oldalról nyílt, másikról zárt intervallumokat, a nyílt, zárt félegyeneseket.

Bevezettük ezután az abszolútérték fogalmát, és felírtuk néhány tulajdonságát (nem bizonyítottam, csak végig kellene gondolni a definíció alapján, talán gyakorlaton megnézzük). Kimondtam a háromszög-egyenlőtlenség klasszikus változatát ($|a + b| \leq |a| + |b|$), valamint a „második változatát” ($||a| - |b|| \leq |a - b|$.) A bizonyítást gyakorlatra hagytam.

Tételként igazoltam, hogy $0 < 1$. Ennek következménye, hogy $1 + 1 + \cdots + 1$ mind különböző, és ezek halmazát neveztem pozitív egészeknek, amelyet $\mathbb{N}^+$-szal jelöltem. Az egész számok halmaz ebből a 0 és az ellentett elemek hozávételével kapható, jelölése $\mathbb{Z}$. Az a/b alakú számok halmazát, ahol a, b egészek és $b \neq 0$, a racionális számok halmazának nevezzük, jelölése $\mathbb{Q}$.

Következett az Arkhimédészi axióma, amely az előzőekből nem vezethető le. Alkalmazásként kimondtam, hogy bármely két különbözü valós szám között van racionális szám. A bizonyítás során egy aprónak látszó banánhéjon sikerül elcsúsznom, ezért a másik oldalon leírom részletesen a bizonyítást.

Végül definiáltam az egymásba skatulyázott intervallumok fogalmát és kimondtam a Cantor-axiómát. Utolsó példaként megmelítettem, hogy egymásba skatulyázott nyílt intervallumok metszete lehet üres, például $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \emptyset$.

LAPOZZ!

Tétel. *Bármely két különböző valós szám között van racionális szám.*

Bizonyítás. Legyen $a < b$ és lássuk be, hogy a és b között van racionális szám. Három esetet különböztetünk meg: $0 \leq a < b$, $a < b \leq 0$ és $a < 0 < b$.

Tegyük fel először, hogy $0 \leq a < b$. Az Arkhimédészi axióma miatt van olyan n pozitív egész szám, hogy $\frac{1}{b-a} < n$, vagyis $\frac{1}{n} < b - a$. Ismét az Arkhimédészi axióma következményeként található olyan m pozitív egész szám, amelyre $na < m$, azaz $a < \frac{m}{n}$. Ez azt jelenti, hogy a $H = \{m \in \mathbb{N}^+ : a < \frac{m}{n}\}$ halmaz nem üres. Legyen k a H halmaz legkisebb eleme, vagyis a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelyre $a < \frac{k}{n}$. Ilyen k létezik, mert pozitív egészekből álló nemüres halmaznak van legkisebb eleme. Ha $k = 1$, akkor $\frac{k-1}{n} = \frac{0}{n} = 0 \leq a$; ha pedig $k > 1$, akkor $k - 1$ pozitív egész, amely k-nál kisebb, tehát k minimalitásából adódóan $\frac{k-1}{n} \leq a$. Vagyis mindenképpen $\frac{k-1}{n} \leq a$, amiből következően

$$\frac{k}{n} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$

tehát $\frac{k}{n} < b$. Végeredményben $a < \frac{k}{n} < b$.

Ha $a < b \leq 0$, akkor $0 \leq -b < -a$, így az előző rész alapján van olyan $\frac{k}{n}$ racionális szám, amelyre $-b < \frac{k}{n} < -a$, ezért $a < -\frac{k}{n} < b$.

Ha pedig $a < 0 < b$, akkor a 0 racionális szám az a és b között. □

Megjegyzés. Abból, hogy k a legkisebb pozitív egész szám, amelyre $a < \frac{k}{n}$, még nem következik, hogy $\frac{k-1}{n} \leq a$, mert például $a = -1$ esetén $k = 1$ a legkisebb pozitív egész, amelyre $-1 < \frac{k}{n}$, de $-1 < \frac{0}{n} = \frac{k-1}{n}$.