Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

2. előadás (február 17.)

Az órát a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség bizonyításával kezdtük. A tankönyvben szereplő gondolatmenetet néztük, amelynek ötlete, hogy az indukció az $a_1, \dots, a_n$ számok között a számtani középtől különböző számok darabszámára megy, ezt az egyszerűség kedvéért k-val jelöltük. Ráadásul az indukciónak azt a változatát használjuk, amikor belátjuk $k = 0$-ra és $k = 1$-re az állítást, majd megmutatjuk, hogy ha $(k-2)$-re és $(k-1)$-re igaz, akkor k-ra is. A $k = 0$ esetben mind az n darab szám ugyanaz, így az egyenlőtlenség nyilvánvaló. A $k = 1$ esetben nincs ilyen szám n-es (tehát igaz rájuk az állítás), mert beláttuk, hogy $\min_{j=1,\dots,n} a_j < A < \max_{j=1,\dots,n} a_j$ (ezt később használjuk majd). Az indukciós lépés lényege, hogy az a_j-k közül a legkisebbet (feltehető, hogy ez éppen a_1) lecseréljük A-ra, a legnagyobbat (feltehető, hogy ez éppen a_n) pedig $a_1 + a_n - A$-ra. Ekkor a számtani közép változatlan marad, a mértani közép nő, ez éppen az előbbi $a_1 < A < a_n$ összefüggés következménye.

A bizonyítás után megemlítettem Cauchy indukciós bizonyításának zseniális ötletét, nevezetesen, hogy először a 2 hatvány n-ekre látjuk be az egyenlőtlenséget indukcióval, aztán pedig a közbülső n-ekre (ez igen látványos a $2 \to 4 \to 3$ átmenet esetén, kár, hogy erre nincs idő, mindenesetre a honlapomra felteszem Cauchy eredeti bizonyítását).

Ezután rátértünk a halmazok témakörére. Megbeszéltük, hogy a halmaz és eleme alapfogalom. Kicsit beszéltem arról, hogy ennek ellenére vigyázni kell a halmazokkal és a különböző tulajdonságokkal való definiálással, példaként a borbély paradoxont és a Berry-paradoxont említettem (utóbbi: „a legkisebb, 100-nál kevesebb szóval nem definiálható szám”).

Ezt követően megbeszélük (logikai jelekkel) halmazok egyenlőségét, tartalmazását, az üreshalmazt, majd a halmazműveleteket – unió, metszet, különbség, komplementer – értelmeztem (két halmaz esetén, valamint tetszőleges A_i halmazokra, ahol $i \in I$ indexhalmaz). Felírtam a különböző műveleti szabályokat (kommutatív, asszociatív, disztributív, ezeket csak szóban neveztem meg, valamint de Morgan-azonosságok).

Következtek ezután a függvények: függvény = leképezés = hozzárendelés alapfogalom. Definiáltuk az értelmezési tartományt, értékkészletet, és halmaz képét.

Végül röviden sorozatokról beszéltem. Az n tagú sorozat a fejünkben $a_1, \dots, a_n$, de formálisan $f\colon \{1, 2 \dots, n\} \to B$ függvény. Hasonlóan, a végtelen sorozat is egy függvény, de órán (és a fejünkben) továbbra is $a_1, a_2, \dots$.

Az óra végén belekezdtünk a valós számok témakörébe. Beszéltünk arról, hogy mit jelent a konstruktív megalapozás: megkonstruáljuk a valós számokat, például legyenek végtelen tizedestörtek, de ekkor definiálnunk kell közöttük a műveleteket és a rendezést. Mi ehelyett az axiomatikus felépítést választjuk: nem törődünk azzal, hogy mik a valós számok, csak a tulajdonságaik érdekelnek. Elvárjuk, hogy eleget tegyenek bizonyos szabályoknak (axiómák). Természetesen itt is jogosan vetődik fel, hogy van-e olyan struktúra, amely kielégíti az általunk kirótt szabályokat. A legvégén még felírtam az axiómák négy csoportját (test, rendezési, Arkhimédészi és Cantor). A következő előadást az axiómák részletes tárgyalásával folytatjuk.