Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

13. előadás (május 11.)

A Cauchy-kritériummal kezdtük az előadást. Mielőtt kimondtam, emlékeztettem a sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-kritériumra. Ezt kell alkalmazni a sor részletösszegeire és rögtön megkapjuk a sorok konvergenciájára vonatkozó változatot: $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N, hogy minden $m > n > N$ esetén $\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| < \varepsilon$.

Ezután az abszolút és feltételes konvergencia tárgyalása következett. Definiáltam az abszolút konvergencia fogalmát, amely azt jelenti, hogy $\sum |a_n|$ konvergens. A definícióban a $\sum a_n$ sor konvergenciájáról nem teszünk fel semmit, mert ez következik az abszolút konvergenciából. Ezt a tételt a Cauchy-kritérium és az n-tagú háromszög-egyenlőtlenség segítségével igazoltuk. Rögtön megjegyeztem a bizonyítás után, hogy visszafele nem igaz a tétel, a sor konvergenciájából nem következik az abszolút konvergencia: például $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens sor, mert Leibniz-típusú, de $\sum \frac{1}{n}$ divergens. Az olyan sorokat, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek, feltételesen konvergens soroknak nevezzük. Világos, hogy egy nemnegatív tagú sor, ha konvergens, akkor abszolút konvergens. De nem csak nemnegatív tagú abszolút konvergens sor létezik, hiszen például $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ abszolút konvergens. Végül kicsit meséltem aról, hogy miért is fontos az abszolút konvergencia fogalma. A feltételesen konvergens sorok gyakran nem úgy viselkednek, ahogy elvárnánk. Többek között feltételesen konvergens sorokat tagonként összeszorozva a kapott sor összege általában nem a két tényező összegének szorzata (sőt, az sem világos, hogy milyen sorrendben kellene összegezni a szorzat tagjait). Másrészt pedig feltételesen konvergens sorok összegzési sorrendjét nem szabad megváltoztatni (átrendezni), mert az összeg megváltozhat. Ezek a furcsaságok abszolút konvergens sorok esetében nem fordulhatnak elő.

Ezt követően néhány nevezetes sor vizsgálatával folytattuk. Előtte megelőlegeztem a logaritmusfüggvény definícióját és tulajdonságait. Egyelőre elfogadjuk, hogy az e^x függvény értékkészlete $\mathbb{R}^+$ (ezt majd később a folytonosság fogalmának segítségével igazoljuk), így $\log_e$ (ezentúl röviden log) minden pozitív valós számra értelmezhető és rendelkezik a megszokott tulajdonságokal. A kitérő után a harmonikus sor részletösszegeivel kapcsolatban bizonyítottunk két állítást. Először azt, hogy $n \geq 2$ esetén $\log n < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n} < \log n+1$. A bizonyítás az $(1+1/n)^n$ és $(1+1/n)^{n+1}$ sorozatok monotonitásán múlt. A másik állítás pedig az volt, hogy az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}-\log n$ sorozat monoton csökkenő, és mivel alulról korlátos, így konvergens. A limesz az Euler-féle $\gamma \approx 0,577$ szám, amelyről megoldatlan, hogy racionális vagy irracionális.

Egy másik nevezetes sor az $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ (részeg fáradékony bolha), amelynek összege $\log 2$. A bizonyítás a harmonikus sor $2n$-edik és n-edik részletösszegei különbségének vizsálatán múlik. Ebből az is rögtön kijön, hogy $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}) = \log 2$.

Itt megint tettem egy kitérőt, és felírtam az $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots$ sort, majd beláttam, hogy az összege $\frac{1}{2}\log 2$. Ezenkívül bizonyítás nélkül megemlítetem, hogy $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots = \frac{3}{2}\log 2$. Mindez azt illusztrálja, hogy feltételesen konvergens sorokat nem szabad átrendezni, mert az összeg megváltozik. Valójában tetszőleges valós számot megadva van olyan átrendezés, amelynek összege a szóban forgó szám.

Az előadás végén a tizedestörtekre tértem vissza (ezt időhiány miatt hagytam ki az első soros előadásból, a másodikba pedig logikailag nem illett bele). Az egyetlen tétel, amelyet beláttunk, hogy ha az $x \geq 1$ valós szám végtelen tizedestört alakja $n, a_1a_2a_3\ldots$, akkor az $n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots$ sor konvergens és összege éppen x. A bizonyítás egyszerűen a végtelen tizedestört alak definícióján múlt.

Végül az utolsó 5 percben a vizsgákról ejtettem röviden szót.