Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

12. előadás (május 5.)

Az előadást azzal kezdtem, hogy kimondtam újra az összehasonlító kritériumokat, és aztán igazoltuk is. A bizonyítás a részletösszegek felülről (nem) korlátosságán és a megfelelő írányú becslésen múlt. Megjegyeztem, hogy az $0 \leq a_n \leq b_n$ feltételnek elég egy küszöbtől kezdve teljesülni, hiszen a sor konvergenciája szempontjából az összegzés kezdőindexe lényegtelen. Néztünk két példát: $\sum \frac{n}{n^2+1}$ divergenciáját, amely az $\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ becslésből és a minoráns kritériumból következik; továbbá $\sum \frac{1}{n^2+4}$ konvergenciáját, amely az $\frac{1}{n^2+4} < \frac{1}{n^2}$ becslésből és a majoráns kritériumból következik. Ezután a gyökkritériummal folytattuk. Ezt három részben mondtam ki: 1. ha van olyan $q < 1$, hogy valamilyen N küszöbtől kezdődően $\sqrt[n]{a_n} < q$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 2. ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 3. ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens. Az 1. bizonyítása a mértani soral való összehasonlításon múlt; a 2. részből következik az 1. feltételeinek teljesülése; a 3. feltétele pedig magával vonja a triviális kritérium nemteljesülését. Rögtön megjegyeztem, hogy ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor általában se a konvergenciára, se a divergenciára nem következtethetünk, mert például a $\sum \frac{1}{n}$ és $\sum \frac{1}{n^2}$ sorokra a limesz éppen 1, de az egyik divergens, míg a másik konvergens. Néztünk ezután három példát: $\sum \frac{n}{2^n}$ (ezt összehasonlító kritériummal is megvizsgáltuk, de láttuk, hogy ahhoz meg kell sejteni a konvergenciát), erre a kérdéses limesz $1/2$ (feltettem azt a kérdést is, hogy vajon mennyi a sor összege); továbbá megnéztük a $\sum(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ sort, amelyre ugyancsak $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$; végül a $\sum \frac{n!}{n^n}$ sort írtam fel és láttuk, hogy a gyökkritérium alkalmazásához ismerni kellene az $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ sorozat limeszét (ami egyébként $1/e$).

Következett a hányados kritérium, amelyet ugyancsak három részben mondtam ki: 1. ha van olyan $q < 1$, hogy valamilyen N küszöbtől kezdődően $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 2. ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; 3. ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens. A bizonyítás ismét a mértani sorral való összehasonlíthatóságon múlt. Példaképpen megénztük újra a $\sum \frac{n!}{n^n}$ sort és láttuk, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}$. Megjegyeztem, hogy ez nem meglepő, mert ha létezik $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, akkor egyenlőek. Mutattam arra is példát, hogy gyökkritérium alkalmazható, de a hányadoskritérium nem: ha $\frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$, akkor például $q = 2/3$ választással teljesül a gyökkritérium 1. változata, de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ akármilyen nagy értékeket is felvesz. Ennek ellenére a hányadoskritériumot célszerű sok esetben alkalmazni, mert egyszerűbb a kérdéses limesz számolása.

Ezt követően a kondenzációs kritériumot láttuk be. A bizonyítás ötlete a harmonikus sor divergenciájánál látott „sűrítéshez” hasonló volt, alsó és felső becsléssel. Alkalmazásképpen igazoltuk, hogy a hiperharmonikus sorok pontosan $\alpha > 1$ kitevő esetén konvergensek.

Végül a Leibniz-kritérimot tárgyaltuk a szokásos bizonyítással: a részletösszegek egy monoton növő és egy monoton csökkenő részsorozatra bonthatók szét, amelyek különbsége 0-hoz tart, így a sor konvergens. Példaképpen a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ sor írtam fel, és jeleztem, hogy következő órán az összegét is meghatározuk.