Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

10. előadás (április 28.)

Belekezdtünk a sorok témakörébe. Először néhány motivációs példát írtam fel: mennyivel egyenlő $0,99999\ldots$? Középiskolás okoskodással azt mondhatjuk, hogy ha a szóban forgó szám x, akkor $10x - x = 9$, tehát $x = 1$. Ezzel a gondolatmenettel azonban vigyázni kell, mert ilyen módon az $x = 1 + 2 + 2^2 + \ldots$ összegre $2x - x = -1$, vagyis $x = -1$. Hasonló módon, $x = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ esetén $x - (-x) = -1$, ezért $x = -1/2$. Világos, hogy egyik esetben sem megalapozott a műveletek elvégzése, hiszen az axiómák nem szólnak végtelen sok tagú összegekről. Ezt definiálni kell.

Adott (a_n) sorozat esetén bevezettük a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ (formális) végtelen sort. A sor részletösszegei az $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, stb. sorozat tagjai. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens és összege $A \in \mathbb{R}$, ha a részletösszegekből álló (s_n) sorozat konvergens és limesze A. Ha a sor nem konvergens, akkor divergensnek hívjuk. Amennyiben $s_n \to \infty$, akkor a sor divergens, de van összege, méghozzá ∞ (a $-\infty$ összeget hasonlóan értelmezzük). Mindezeket úgy jelöljük, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$, és $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$.

Ezután példákat néztünk. Az $a_i = 0$ esetben a sor konvergens és összege 0; az $a_i = 1$ esetben a sor divergens és összege ∞; az $a_i = (-1)^i$ esetben $s_{2k+1} = -1$ és $s_{2k} = 0$, amely sorozat oszcillálva divergens (miért? ezt szóban elmondtam részsorozatokkal), ezért a sor divergens és nincs összege; az $a_i = 2^n$ esetben a sor divergens, összege ∞; az $a_i = 1/2^i$ esetben a sor összege ($i = 0$-tól indítva) a mértani sorozat első n tagjának összegképletének felhasználásával 2. Tételként kimondtuk és beláttuk ennek általános változatát a $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ mértani sor konvergenciáját, divergenciáját: $|q| < 1$ esetén a sor konvergens és összege $1/(1-q)$; a $q \geq 1$ esetben a sor divergens, összege ∞; végül a $q \leq -1$ esetben a sor divergens és nincs összege.

Ezután megnéztük a sor konvergenciája és algebrai műveletek kapcsolatát: ha $\sum_{i=1}^{\infty}$ konvergens és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ is konvergens és összege $c\sum_{i=1}^{\infty} a_i$; ha $\sum_{i=1}^{\infty}$ és $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergensek, akkor $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)$ is konvergens és összege $\sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$. A bizonyítás egyszerűen megy a részletösszegek segítségével. Megemlítettem, hogy egy sor konvergenciáján nem változtat, ha az összeg első véges sok tagját elhagyjuk, tehát $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum_{i=N}^{\infty} a_i$ konvergens. Végül arra is felhívtam a figyelmet, hogy a zárójelekkel is vigyázni kell, például a $(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$ és a $-1+1-1+1-\ldots$ sorok nem ugyanazok, az egyik konvergens, a másiknak nincs összege. Azt is előrevetítettem, hogy az összeadások sorrendjét sem szabad általában megváltoztatni, erre majd látunk egy példát később.

Ezt követően rátértünk a konvergenciakritériumok tárgyalására. A triviális kritériummal kezdtem: ha a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$sor konvergens, akkor $a_i \to 0$. Láttuk a fáradékony bolha példáját ($a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$), amely azt mutatta, hogy a triviális kritérium csak szükséges feltétel a konvergenciához.

Nemnegatív sorok konvergenciájával kapcsolatban kimondtam, hogy egy ilyen sornak mindig van összege, méghozzá a sor konvergens, ha a részletösszeg-sorozata felülről korlátos, továbbá a sor összege ∞, ha a részletösszeg-sorozata felülről nem korlátos.

Példaként megnéztük a harmonikus sor divergenciáját. Az első bizonyítás a szokásos 2^n-es csoportosítással és alsó becsléssel igazolta, hogy $s_{2^n} \geq 1 + n/2$, tehát (s_n) felülről nem korlátos. A másik bizonyításban az $s_{2n} - s_n$ különbségről láttuk be egyszerű becsléssel, hogy legalább $1/2$, így (s_n) nem lehet konvergens.

Megnéztük ezután a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját. Mondtam, hogy ez is kijön a harmonikus sornál alkalmazott 2^n-es csoportostással, csak most felső becslés kell. Egy másik bizonyítás pedig az volt, hogy $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, így egy teleszkopikus összeggel tudjuk felülről becsülni a részletösszegeket. A teleszkopikus összeg $2 - 1/n$, amely felülről korlátos, így a részletösszegek is azok. Kimondtam, hogy általában a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$. Kicsit meséltem a hiperharmonikus sor összegéről α pozitív egész esetén ($\alpha = 2$-re az összeg $\pi^2/6$, páros α-ra π^{2k}-szor egy racionális szám, páratlan α esetén az $\alpha = 3$ kivételével azt sem tudjuk, hogy racionális vagy irracionális-e.)

Az óra végén a majoráns és minoráns kritériumot mondtam ki: ha $0 \leq a_n \leq b_n$ minden n-re és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergens (ez a majoráns) ;ha $0 \leq a_n \leq b_n$ minden n-re és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens (ez a minoráns). A bizonyítást a következő alkalommal nézzük meg.