Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

10. előadás (április 21.)

Az előadás fő témája a monotonitás és határérték kapcsolata volt. Először emlékeztettem, hogy egy sorozat monoton növekedése és csökkenése, valamint szigorú monotonitása mit jelent. Ezután beláttuk, hogy minden monoton sorozatnak van véges vagy végtelen határértéke, pontosabban ha (a_n) monoton növő és felülről korlátos, akkor $\lim a_n = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$; ha (a_n) monoton növekedő és felülről nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$; ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor $\lim a_n = \inf\{a_n\}$; végül ha (a_n) monoton csökkenő és alulról nem korlátos, akkor $\lim a_n = -\infty$.

Alkalmazásként a Newton-féle gyökkeresési eljárást vizsgáltuk, azaz a következő rekurziót: $a_0 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$. Beláttuk, hogy a sorozat $n \geq 1$ esetén monoton csökkenő, ez azzal ekvivalens, hogy minden $n \geq 1$ esetén $a_n \geq \sqrt{2}$, ami a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből könnyen látható. A monotonitás és kolrátosság miatt (a_n) konvergens, a rekurzióban elvégezve a határátmenetet a határértékre egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek egyik gyöke negatív, így a másik gyök a sorozat határértéke, ami $\sqrt{2}$.

Második alkalmazásként az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot vizsgáltuk. A számtani és mértani közepek segítségével beláttuk, hogy monoton növekedő. Hasonlóan látható, hogy a $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton csökkenő, mivel $a_n < b_n$, ezért a_n felülről korlátos, b_n alulról korlátos, tehát mindkettő konvergens. Sőt, a határértékük megegyezik, hiszen $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$. A közös határérték a nevezetes $e \approx 2,71$ szám, amely a későbbi félévekben még sokszor elő fog kerülni. Ízelítőként felírtam az Euler-féle $e^{i\pi} + 1 = 0$ formulát, valamint az $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ Stirling formulát.

Ezután beláttuk, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata, a bizonyítás a csúcselem segítségével történt. Az a_n csúcs a sorozatban, ha minden $m > n$ esetén $a_m < a_n$. Ha végtelen sok csúcs van, akkor azok szigorúan csökkenő sorozatot alkotnak, véges sok csúcs esetén pedig nem nehéz monoton növekedő sorozatot találni. A tétel következménye, hogy minden sorozatnak van határértékkel rendelkező részsorozata. Ennek fontos következménye a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel, mely szerint minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Az óra végén a Cauchy-kritériumra tértünk rá. Definiáltuk a Cauchy-sorozat fogalmát: (a_n) Cauchy-sorozat ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található N küszöb, hogy minden $n, m > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Beláttuk, hogy ha (a_n) Cauchy, akkor korlátos. Végül kimondtuk a Cauchy-kritériumot, amely szerint (a_n) pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat. A konvergenciából a Cauchy-tulajdonság egyszerűen következik a háromszög-egyenlőtlenségből, a másik irányhoz a korlátosságot és a Bolzano–Weierstrass tételt kell használni: kiválasztunk egy konvergens részsorozatot, majd a háromszög-egyenlőtlenséggel belátjuk, hogy az egész sorozat konvergens.