Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

1. előadás (február 10.)

Az óra elején megszavaztuk, hogy 12:10-kor kezdünk, előadás közben nem tartunk szünetet, így 13:40-ig tart az óra. Ezután röviden elmondtam a tárggyal kapcsolatos legfontosabb információkat; minden részletesen elolvasható az abesenyei.web.elte.hu oldalon. Fontos, hogy a gyakorlatokon az előadás anyagával tisztában legyünk (legalább egy képünk legyen arról, hogy mi is folyik az előadáson), ezért a gyakorlatokon a röpdolgozatokban definíció, vagy tétel kimondását és kérjük (bizonyításokat természetesen nem kell tudni).

Mielőtt belekezdtem az analízisbe még felolvastam a következő idézetet, amelyet 1956-ban a Time magazinban írtak a matematikáról, és sajnos ma is lehet benne igazság (de többek között az is a feladatunk, hogy ne így legyen):

> „…a matematika abban a kétes megtiszteltetésben részesül, hogy az egész tananyagban a legkevésbé népszerű tantárgy… A jövendő tanárok az általános iskolában megtanulják a matematika utálatát; és visszatérnek az általános iskolába, hogy újabb nemzedékeket tanítsanak meg erre az utálatra.”

Ezután belevágtunk a logikai műveletek témakörébe. Kicsit beszéltem arról, hogy mi a logika (a helyes következtetések tudománya), illetve mondtam, hogy a matematika állításokkal foglalkozik (alapigazságokból a logika segítségével levezetjük azokat). Majd rátértünk a logikai műveletekre és pontosan definiáltuk az igazságértéküket (mikor igaz, és mikor hamis): $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \implies B, A \iff B$. Ezt követően megbeszéltük a tagadásukat is, ezek a de Morgan-azonosságok, pl. $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$). (de Morgannel kapcsolatban házi feladat, hogy mikor születhetett, ha egyszer az életkorát kérdezőknek azt válaszolta, hogy „x éves voltam az x^2 évben”).

Következett ezután a nyitott mondat „fogalma” és bevezettük az univerzális és egzisztenciális kvantorokat, és megbeszéltük az igazságértéküket, tagadásukat: $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$, $\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$, $\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$.

Rátértünk ezt követően a bizonyítási módszerekre, először az indirekt bizonyítás menetét néztük meg. Példaképpen a $\sqrt{2}$ irracionalitását igazoltam, de nem az elcsépelt bizonyítással, hanem a következőt mondtam el, amely Michael Keane-től származik (itt csak nagyon tömören vázolom): indirekt, legyen q a legkisebb pozitív egész szám, amelyre $q\sqrt{2}$ egész. De akkor $q' = q\sqrt{2} - q$ is pozitív egész, amely ráadásul kisebb, mint q és $q'\sqrt{2} = 2q - \sqrt{2}$ ugyancsak egész, ami ellentmond q minimalitásának.

Beszéltem kicsit az indirekt bizonyítás buktatóiról, és jeleztem, hogy a gyakorlatokon szerepelni fog „az 1 a legnagyobb természetes szám” hibás bizonyítása indirekt módon.

Majd jött a teljes indukció legegyszerűbb formája: ha A_1 igaz, és $\forall n(A_n \implies A_{n+1})$, akkor $\forall n \geq 1$ esetén A_n igaz. Rögtön ezután beszéltem arról, hogy ennek különböző általánosabb változatait is használhatjuk, például a kezdőlépés lehet A_5 igazsága, de akkor csak $\forall n \geq 5$ esetén következtethetünk A_n igazságára; vagy ha A_1 igaz és $\forall n(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \implies A_{n+1})$, akkor $\forall n \geq 1$ esetén A_n igaz (mondtam, hogy majd nézünk konkrét példát erre gyakorlaton). Végül az indukció kapcsán is szóltam a buktatókról, a „minden ló egyforma színű” (vagy Pólya Györgynél „minden lánynak ugyanolyan színű a szeme” stb.) hibás bizonyítást megnézzük gyakorlaton.

A teljes indukció alkalmazásaként beláttuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget a szokásos bizonyítással. Az egyenlőség esetét felírtam megjegyzésként és kértem, hogy gondolják át a bizonyítás alapján.

Ezután rátértünk a nevezetes közepekre, értelmeztem n darab pozitív szám számtani (A), mértani (G) és harmonikus (H) közepét, majd kimondtam a közöttük fennálló egyenlőtlenséget ($A \geq G \geq H$), valamint az egyenlőség szükséges és elégséges feltételét (az n darab szám egyenlő). Beláttam, hogy ha $A \geq G$, igaz, akkor $G \geq H$ is. Az óra utolsó 5 percében vázoltam az $A \geq G$ egyenlőtlenségnek a tankönyvben szereplő teljes indukciós bizonyításának alapgondolatát: az indukció az $a_1, \ldots, a_n$ szám n-es azon elemeinek számára megy, amelyek különböznek a számtani középtől. A $k = 0$ esetben nyilvánvaló az egyenlőtlenség. Az indukciós lépéssel folytatjuk a jövő héten.