

Bevezető analízis 2. vizsgatematika

Osztatlan matematikatanár szak, 2015. tavasz

Tudnivalók a vizgáról. A vizsgákra a Neptunban kell jelentkezni, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsgák 8:30-kor kezdődnek a D. 3-719-es teremben. Várhatóan a vizsga előtti napon emailben küldök vizsgabeosztást. Konzultáció a vizsgák előtti (munka)napokon 15 órától a D. 3-619-es szobában. Emellett emailben szívesen válaszolok kérdésekre, tessék nyugodtan írni bármilyen probléma merül fel.

A vizsgán ezen a tematikán kívül semmilyen segédeszköz nem használható, üres lap viszont legyen mindenkinél. A vizsga megkezdésekor mindenki egy feladatot és két tételt húz (amelyek a tételsor három különböző részét fedik le), majd 1 óra felkészülési időt kap. Az elégséges jegy feltétele a feladat megoldása (esetleg kis segítséggel), a definíciók és tételek pontos kimondása és *értése* (ezt egyszerű kérdésekkel könnyű tesztelni), a bizonyítások alap gondolatának ismerete, továbbá a húzottaktól eltérő tételekből szűrőpróbaszerűen feltett kérdésekre való helyes válaszadás (e kérdések is definíciók, tételek ismeretét és értését ellenőrzik).

Vizsgakérdések.

1. Logikai alapfogalmak, logikai műveletek, kvantorok. Indirekt bizonyítás, $\sqrt{2}$ irracionálisága. Teljes indukció és különböző változatai. Bernoulli-egyenlőtlenség.
2. Számítási, mértani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség. Halmazok. Halmazok egyenlősége, részhalmazok, üreshalmaz. Műveletek halmazokkal, azonosságok. Függvények. Értelmezési tartomány, értékkészlet. Sorozatok (n tagú és végtelen).
3. A valós számok axiómarendszere: konstruktív és axiomatikus megalapozás. A testaxiómák és következményeik.
4. A rendezési axiómák és következményeik. Intervallumok, pozitív, negatív számok. Abszolútérték, tulajdonságok. Háromszög-egyenlőtlenségek. Pozitív egészek, egészek, racionális, irracionális számok.
5. Az arkhimédészi axióma. Bármely két különböző valós szám között van racionális szám.
6. Egymásba skatulyázott zárt intervallumok. Cantor-axióma. Négyzetgyök létezése.
7. Tizedes törtek. Véges tizedes tört. Végtelen tizedes tört alak. Minden $x \geq 0$ számnak van végtelen tizedes tört alakja. Minden végtelen tizedes törthöz létezik pontosan egy olyan $x \geq 0$ szám, amelynek ez a tizedes tört alakja.
8. Halmazok maximuma, minimuma, példák. Felső és alsó korlát, felülről és alulról korlátos halmazok, példák. A teljességi tétel. Halmazok szuprémuma, infimuma, példák.
9. A hatványozás definíciója és tulajdonságai.
10. Konvergencia sorozatok, ekvivalens definíciók, példák. A határérték egyértelműsége.
11. Végtelenhez és mínusz végtelenhez tartó sorozatok, ekvivalens definíciók. Oszcilláló divergens sorozatok. Példák.
12. Határérték és korlátosság. Konkrét sorozatok határértéke: n^p , a^n , $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$. Részsorozatok. Átrendezés.
13. Határérték és algebrai műveletek: összeg-, szorzat- és hányadossorozat limesze. Kritikus határértékek.
14. Határérték és rendezés. Rendőrelv. Példák.
15. Elégséges feltételek $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ teljesüléséhez. Az n^k/a^n , $a^n/n!$, $n!/n^n$ sorozatok határértéke. Nagyságrendek. Aszimptotikus egyenlőség, példa.

16. Határérték és monotonitás. Monoton sorozat limesze. A Newton-féle négyzetgyökkeresési eljárás. Az $(1 + 1/n)^n$ sorozat és az e szám.
17. Monoton részsorozat létezése. Bolzano–Weierstrass-tétel. Cauchy-sorozat. Cauchy-kritérium.
18. Végtelen sorok. Részletösszeg, sor konvergenciája, összege. Példák. Mértani sor. Szükséges feltétel konvergenciához (triviális kritérium). Nemnegatív tagú sornak van összege. Hiperharmonikus sorok. Tizedes törtek.
19. Nemnegatív tagú sorok konvergenciakritériumai: majoráns, minoráns, hányados-, gyök-, kondenzációs kritérium. Leibniz-sorok. Példák.
20. Cauchy-kritérium. Abszolút és feltételes konvergencia. Példák. Nevezetes összegek és határértékek: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n) = \gamma$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}) = \log 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.