1. Legyen $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \\ 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Van-e olyan intervallum, ahol f monoton nő? Van-e olyan pont, ahol f lokálisan nő?

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenütt differenciálható függvény. Határozzuk meg, hogy melyik állításból következik a másik!

2. **P:** $f'(3) = 0$ **Q:** f-nek 3-ban lokális szélsőértéke van.

3. **P:** $f'(3) \geq 0$ **Q:** Az f függvény 3-ban lokálisan nő.

4. **P:** $f'(3) > 0$ **Q:** Az f függvény 3-ban szigorúan lokálisan nő.

---

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenütt differenciálható függvény. Határozzuk meg, hogy melyik állításból következik a másik!

P: f-nek 3-ban lokális maximuma van. **Q:** f-nek 3-ban abszolút maximuma van.

6. Legyen $f : [3,5] \to \mathbb{R}$ folytonos a $[3,5]$ intervallumon, és differenciálható a $(3,5)$ intervallumon. Lehet-e f-nek 3-ban abszolút maximuma? Lehet-e f-nek 3-ban lokális maximuma?

7. Legyen $f : [3,5] \to \mathbb{R}$ folytonos a $[3,5]$ intervallumon, és differenciálható a $(3,5)$ intervallumon. Lehet-e, hogy f abszolút minimum helye egyben lokális minimum hely is? Lehet-e, hogy f abszolút minimum helye egyetlen lokális minimum hellyel sem esik egybe? Lehet-e, hogy f-nek egyáltalán nincs lokális minimuma? Lehet-e, hogy f-nek egyáltalán nincs abszolút minimuma?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a p polinom minden gyöke valós, akkor a p' polinom minden gyöke is valós!

9. Pisti egy 100m sugarú kör alakú tó partján áll, és át akar jutni az átellenes pontra. Úszik egy húr mentén, majd onnan gyalog megy. Milyen irányban indulva ér át a leghamarabb, ha $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel úszik és $2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel gyalogol?

10. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igaz-e, hogy ha $(\exists a < b)$ úgy, hogy az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő húr vízszintes, akkor $(\exists c)\ f'(c) = 0$?

11. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igaz-e, hogy ha $(\exists c)\ f'(c) = 0$, akkor $(\exists a < b)$ úgy, hogy az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő húr vízszintes?

Határozzuk meg a következő határértékeket!

12. $\lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x)$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[37]{x+1} - \sqrt[37]{x})$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} (\log(x+1) - \log x)$

---

16. Bizonyítsuk be, hogy $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $\left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \leq 1.$

17. Bizonyítsuk be, hogy $x > 0$ esetén $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$

18. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre igaz, hogy $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = f(x)$.

19. Jelölje $H_c(a_1, \ldots, a_n)$ a pozitív $a_1, \ldots, a_n$ számok c-edik hatványközepét. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\min\limits_i a_i \le H_c(a_1, \ldots, a_n) \le \max\limits_i a_i$,

(b) $\lim\limits_{c \to -\infty} H_c(a_1, \ldots, a_n) = \min\limits_i a_i$,

(c) $\lim\limits_{c \to \infty} H_c(a_1, \ldots, a_n) = \max\limits_i a_i$,

(d) $\lim\limits_{c \to 0} H_c(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

20. Határozzuk meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x e^{\sin x}}{\log x}$

Adjunk példát olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre, ha léteznek, amelyek teljesítik a következő feladatok feltételeit!

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ és $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ne 1$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ és $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \ne 1$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ és $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ és $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$

Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat az alapintegrálok és lineáris helyettesítés segítségével!

25. $\displaystyle\int \left(3 + \frac{3}{1+x^2}\right) dx$

26. $\displaystyle\int \left(2x^3 - \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}\right) dx$

27. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

28. $\displaystyle\int \cos(2x+4)\, dx$

29. $\displaystyle\int e^{3x-2}\, dx$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{2x+5}\, dx$

31. $\displaystyle\int \sqrt{6x-1}\, dx$

32. $\displaystyle\int 3^{5x}\, dx$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(3x)}\, dx$

Számítsuk ki a következő, $\displaystyle\int f' f^a$ vagy $\displaystyle\int \frac{f'}{f}$ alakú határozatlan integrálokat!

34. $\displaystyle\int \cos x \sin^{2016} x\, dx$

35. $\displaystyle\int \sin x \cos^{2014} x\, dx$

36. $\displaystyle\int 2x \cdot (x^2+1)^{2015}\, dx$

37. $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$

38. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

39. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

40. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\, dx$

41. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat az eddig tanult módszerekkel!

43. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \left(\frac{4x}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^2}\right)\,dx$

46. $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\sqrt{2x+3}}+\frac{\sqrt{2x+3}}{5}\right)\,dx$

Oldjuk meg a következő differencálegyenleteket!

47. $y' - y\sin x = 0$

48. $y' + 2xy = 0$

49. $y' - 2y\operatorname{ctg} x = 0$

50. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 - 3x - 2$

51. $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2 + x$

52. $y' + y = e^{-x}$

---

53. Melyek azok a $(0,\infty)$-en értelmezett függvények, amelyeknél a grafikonhoz húzott érintőre igaz, hogy az érintési pont felezi az érintőnek a koordinátatengelyek közti darabját?

54. Határozzuk meg azokat a $(0,\infty)$-en értelmezett függvényeket, amelyekre a következő állítás igaz: a grafikon tetszőleges pontjának az origótól mért távolsága ugyanakkora, mint az a szakasz, amit a pontban a görbéhez húzott érintő az y tengelyből lemetsz.

55. A kemencéből kivett kenyér hőmérséklete 20 perc alatt $100°$C-ról $60°$C-ra csökken. A levegő hőmérséklete $25°$C. Newton hűlési törvénye szerint a hűlés sebessége arányos a meleg test és a hidegebb környezete közötti hőmérséklet különbséggel. A hűtés kezdetétől számítva mennyi idő alatt csökken a kenyér hőmérséklete $30°$C-ra?

56. Egy V liter térfogatú tartályban víz van. A tartály alján levő nyíláson keresztül v liter/perc sebességgel folyik ki a tartályban levő folyadék, miközben a tartály feletti csapból v liter/perc sebességgel p töménységű sóoldat folyik a tartályba, ahol p térfogati koncentráció, és $0 < p < 1$. A csapból befolyó sóoldat azonnal elkeveredik a tartályban levő folyadékkal. Határozzuk meg a tartályban levő sóoldat q töménységét az idő függvényében!

Oldjuk meg a következő szeparábilis differenciálegyenleteket!

57. $y' = e^{y-x}$

58. $xyy' + y^2 = 1$

59. $y' + y = 0$

Oldjuk meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket!

60. $y' + xy = 0$

61. $y' - \dfrac{y}{x} = x$

62. $\dfrac{1}{1-x^2}y' + \dfrac{1}{y^2} = 0$

63. $y' = e^{x+y}$

64. $y' + 2xy = 0$

65. $y' + 2xy^2 = 0$

Oldjuk meg a következő másodrendű differenciálegyenleteket!

66. $y'' - 5y' + 6y = 0$

67. $y'' - 5y' + 8y = 0$

68. $y'' - 2y' + y = 0$

69. $y'' + 2y = 0$

70. $y'' + 2y' = 0$

71. $y'' - y' - 6y = x^2$

72. $y'' - 5y' + 8y = \sin x$

73. $y'' - 5y' + 6y = x + 2$

74. $y'' + 2y = e^x$

---

75. Egy motorcsónak sebessége állóvízben $v_0 = 18\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, ezután 40s alatt a csónak sebessége $v_1 = 9\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra csökken. A víz ellenállása arányos a csónak sebességével. Mekkora a csónak sebessége 2 perccel a motor kikapcsolása után?

76. Egy rakétát $v_0 = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel lőnek ki függőlegesen felfelé. A levegő ellenállása lassítja a mozgást, a rakéta ebből származó lassulása $-kv^2$, ahol v a rakéta pillanatnyi sebessége, k pedig a közegellenállási együttható. Határozzuk meg, mennyi idő múlva éri el a rakéta legmagasabb helyzetét! Oldjuk meg a feladatot úgy is, ha a közegellenállás $-kv^{1,7}$.

77. Egy testet függőlegesen felfelé hajítanak v_0 kezdősebességgel. Határozzuk meg a mozgás út-idő függvényét a kezdeti pillanatban elfoglalt helyétől számítva, feltéve, hogy a test csakis a nehézségi erő hatására mozog!

78. Egy m tömegű test h magasságból esik le. Esés közben a testre kv nagyságú, felfele mutató közegellenállási erő hat, ahol v a test pillanatnyi sebessége. Határozzuk meg a test sebességét az idő függvényében!

79. A rezgőmozgást végző m tömegű testre egy, a sebességgel arányos fékező erő hat (csillapított rezgőmozgás). Ilyen csillapítást végez például az autó kerekén a lengéscsillapító. Ekkor a mozgás differenciálegyenlete $my'' + cy' + ky = 0$, ahol $k > 0$ a rugóállandó, $c > 0$ a csillapítási tényező. Keressük meg az egyenlet megoldásait és vizsgáljuk meg a megoldások menetét!

80. Vizsgáljuk meg az $my'' + ky = M\sin(\omega_k t)$ egyenlettel leírt kényszerrezgést! ($M\sin(\omega_k t)$ a kényszererő nagysága.)