# Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

**9. előadás (november 11.)**

Az óra első felében a Bolzano-tétellelfoglalkoztunk. A múltkor félbehagyott bizonyítást befejeztük és megfogalmaztunk néhány következményt. Egyrészt, ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $f$ értékkészlete a $[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$ intervallum. Ez a Weierstrass- és a Bolzano-tétel kombinációjának folyománya. Általánosabban, ha az $f$ függvény egy intervallumon van értelmezve és folytonos, akkor $R(f)$ is intervallum, amely tartalmazza az $(\inf R(f), \sup R(f))$ nyílt intervallumot és része a $[\inf R(f), \sup R(f)]$ zárt intervallumnak (ha ez utóbbiban valamelyik határ nem véges, akkor ott nyíltra gondolunk). Egy további következmény, hogy egy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan akkor injektív, ha szigorúan monoton. Egy szigorúan monoton függvény természetesen mindig injektív, a másik irányhoz kell a folytonosság és a Bolzano-tétel, de a bizonyítást csak egy rajzon vázoltam. Végül utolsó következményként újra beláttam, hohy minden pozitív számnak van $k$-adik gyöke, azaz minden $k \in \mathbb{N}^+$ és $a > 0$ esetén létezik $b > 0$, hogy $b^k = a$. Ennek bizonyítása a Bolzano-tétel alkalmazása az $x^k$ folytonos függvényre a $[0, a+1]$ intervallumon. A témakör lezárásaként kicsit meséltem még a Bolzano-tétel további érdekes alkalmazásairól, terület-, kerületfelező egyenesekeről, kétdimenziós sonkásszenvics-tételről, és hasonlókról.

A előadás második felében néhány elemi függvényről beszéltünk, lényegében bizonyítás nélkül, a trigonometrikus függvények esetében pedig mese szinten. Először az $a$ alapú exponenciális függvényt, azaz $a^x$-et tekintettük, ahol $a > 0$ és legtöbbször $a \neq 1$. Korábban már láttuk, hogy $a > 1$ esetén $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$ és $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, valamint $0 < a < 1$ esetén a határértékek felcserélődnek. A valós kitevőjű hatványozás definíciója alapján nem nehéz meggondolni (de kihagytuk), hogy az $a^x$ függvény szigorúan monoton és folytonos, így a Bolzano-tétel alapján $R(a^x) = (0, \infty)$ (a 0-t ugyancsak a definíció szerint nem veszi fel). Értelmezhető tehát $a > 0, a \neq 1$ esetén az $a^x$ inverze, ezt jelöli $\log_a x$. Az inverz értelmezési tartománya $R(a^x) = (0, \infty)$. Megjegyeztem, hogy szokásos az $\lg = \log_{10}$, $\ln = \log_e$ jelölés, de az egyetemi matematikában a legtöbbször az $e$ alapú logaritmust használjuk és egyszerűen log-ot írunk, ha nem félrevezető. Abból, hogy a logaritmus az exponenciális függvény inverze, nem nehéz megnodolni, hogy $a > 1$ esetén $\log_a x$ szigorúan monoton növő, valamint $\lim_{x\to\infty} \log_a x = +\infty$ és $\lim_{x\to 0+0} a^x = -\infty$ (a $0 < a < 1$ esetben csökkenő, és a határértékek felcserélődnek). Végül felírtam a logaritmus néhány azonosságát, összeg, hányados, és hatvány logaritmusát, és ezek közül az elsőt bebizonyítottam. Az óra végén a trigonometrikus függvények értelmezési nehézségeiről beszéltem: az ívmérték pontos definíciójához szükséges az ívhossz fogalma, amely nem triviális (a beírt töröttvonalak hosszainak felső határa). Ezután már lényegében tekinthetjük a középiskolai definíciót, az egységkörre pozitív körüljárással „felmérünk” $x$ hosszú ívet (negatív esetben negatív körüljárással $|x|$ hosszút) és a kapott pont koordinátáit jelölje $(\cos x, \sin x)$. A továbbiakban használhatunk mindent, amit a középiskolában megtanultunk ezekkel a függvényekkel kapcsolatban (pl. addíciós tételek stb.). Ezeket nem is írtam fel és idő sem lenne részletesen áttanulmányozni (sajnos, hiszen fontos lenne).